गणित

कक्षा सातवीं के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

आशा रानी सिंगल श्रीजता दास
बी. देवकीनन्दन सुन्दर लाल
महेन्द्र शंकर सुरजा कुमारी

संपादक

आशा रानी सिंगल
महेन्द्र शंकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
मई 2003
वैशाख 1925
PD 60T+215T MB

3N 81-7450-146-0

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2003

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी,फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुन: प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110016

108, 100 फीट रोड, होस्डेकेरे
हेली एक्सटेंशन बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलूर 560085

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380014

सी.डब्लू.सी. कैंपस
निकट : धनकल बस स्टॉप
पनिहटी, कोलकाता 700114

प्रकाशन सहयोग

संपादन : मरियम बारा
उत्पादन : अरूण चितकारा

रु. 30.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटर मार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा गोपसंस पेपर लिमिटेड, ए-28 सेक्टर-9, नोएडा 201301 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.पी.ई.) 1986 (1992 में संशोधित) में सामान्य शिक्षा के एक अभिन्न अंग के रूप में गणित के पठन-पाठन की आवश्यकता पर स्पष्ट रूप से बल दिया है। चूँकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए प्रौद्योगिकी उन्मुख समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न परिवर्तन होते रहे हैं। राष्ट्रव्यापी चर्चा एवं परामर्श के पश्चात्, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने नवम्बर 2000 में 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.एस.ई.-2000) का प्रकाशन किया। इसमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में उपलब्ध मूल सिद्धांतों और निर्देशों पर पुन: बल दिया गया और विद्यालयी स्तर पर गणित से संबंधित अन्य मुद्दों को विस्तारपूर्वक बताया गया।

एन.सी.एफ.सी.ई. 2000 में, जो मूल रूप से एन.पी.ई. 1986 के अनुरूप है, दिए गए सामान्य उद्देश्यों की पूर्ति हेतु कक्षा 6 के लिए गणित की एक पाठ्यपुस्तक सन् 2002 में लिखी गई थी। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक इस शृंखला की दूसरी पुस्तक है। इस पाठ्यपुस्तक में भी गणित को विद्यार्थियों के आस-पास के परिवेश से संबंधित क्रियाकलापों और प्रेरक उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत करने का प्रयत्न किया गया है।

बदलती हुई प्रवृतियों के आधार पर दक्षताओं एवं अभिवृतियों को विकसित कर ज्ञान प्रदान करने के लिए, पाठ्यपुस्तक में सम्मिलित विषयवस्तु और सुझाए गए क्रियाकलापों को संयोजित किया गया है। इसे अधिकांश रूप से दैनिक जीवन के लिए आवश्यक गणित के सारभूत तथ्यों के अध्ययन तक ही सीमित रखा गया है। पाठ्यसामग्री और सुझाए गए क्रियाकलापों को हमारे देश की व्यापक विद्यालयी पद्धतियों की विभिन्न आवश्यकताओं, पृष्ठभूमि और पर्यावरण के अनुकूल बनाने का एक सार्थक प्रयास किया गया है। विषयवस्तु को सरल एवं रोचक भाषा में प्रस्तुत करने का विशेष ध्यान रखा गया है।

पाठ्यपुस्तक का प्रथम प्रारूप विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा विकसित किया गया है जिन्हें अध्यापन और अनुसंधान का व्यापक अनुभव प्राप्त था। तत्पश्चात् एक समीक्षा कार्यशाला में इस प्रारूप की विषयवस्तु एवं उसके प्रस्तुतिकरण की विधि को पढ़ाने वाले शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों द्वारा गहन रूप से समीक्षात्मक विवेचना की गई। समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त टिप्पणियों और सुझावों पर लेखकों ने विचार किया और इस प्रारूप को उपयुक्त रूप से संशोधित कर अंतिम पांडुलिपि तैयार की गई। लेखक दल ने गणित की पूर्व पाठ्यपुस्तक के प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुझावों एवं पुनर्निवेशन का उपयोग किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में, जहाँ उपयुक्त समझा गया, लेखक दल ने पूर्व प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों का भी प्रयोग किया।

इतने अल्प समय में इस पुस्तक को विकसित करने के लिए मैं लेखक दल के सदस्यों, इसके अध्यक्ष, संपादकों, समीक्षकों तथा इनसे संबंधित संस्थानों को धन्यवाद देता हूँ। पुस्तक में सुधार हेतु सुझावों का स्वागत किया जाएगा।

जे.एस. राजपूत

नई दिल्ली — *निदेशक*

फरवरी 2003 — *राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्*

प्रस्तावना

औपचारिक शिक्षा के प्रारंभ से ही गणित विद्यालयी शिक्षा का एक अभिन्न अंग रहा है और इसने न केवल सभ्यता की उन्नति में बल्कि भौतिक विज्ञान और अन्य विषयों के विकास में भी प्रबल भूमिका निभाई है। चूँकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन हुए हैं। उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित पाठ्यचर्या में सुधार कर उसे समायानुकूल बनाने का वर्तमान प्रयास प्रयोक्ता समूहों से पुनर्निवेशन, ज्ञान की नवीन विचार-धारा, के आविर्भाव और राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) द्वारा विस्तृत चर्चा के उपरांत नवंबर 2000 में प्रकाशित 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.एस.ई. 2000)में दिए गए पाठ्यचर्या संबंधी विभिन्न सरोकारों पर आधारित एक प्रयास है। इससे पहले 'पाठ्यचर्या रूपरेखा पर परिचर्चा दस्तावेज प्रारूप' तैयार किया गया जिस पर शिक्षक-प्रशिक्षकों, विभिन्न परीक्षा बोर्डों से नामित व्यक्तियों, शिक्षा निदेशालयों और विभिन्न राज्यों/संघ राज्य क्षेत्रों की राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों (एस.सी.ई.आर.टी), के प्रतिनिधियों, सामान्य जन एवं विद्यालयों, विश्वविद्यालयों, महाविद्यालयों और परिषद् के संकाय सदस्यों द्वारा विभिन्न स्तरों पर चर्चा की गई।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा से उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के संबंध में उभर कर आए कुछ सामान्य पाठ्यचर्या सरोकार इस प्रकार हैं:

- पाठ्यचर्या को सामाजिक परिवेश और व्यक्ति विशेष के जन्म से संबद्ध पूर्वाग्रहों को निष्प्रभावित करने तथा सार्वजनिक भाव एवं समानता की जागरूकता का सृजन करने योग्य होना चाहिए।
- बालिका शिक्षा।
- पर्यावरण शिक्षा।
- स्वदेशीय ज्ञान और प्राचीन काल से अब तक विज्ञान और गणित में भारत के योगदान का समुचित समावेश।
- अप्रचलित और अनावश्यक विषयवस्तु को हटाकर पाठ्यचर्या के बोझ में कमी तथा माध्यमिक स्तर पर गणित के शिक्षण के लिए आवश्यक ज्ञान एवं पृष्ठभूमि प्रदान करना।

उपरोक्त सरोकारों को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने गणित की पाठ्यपुस्तकों को विकसित करने के लिए लेखक दलों का गठन किया। उच्च प्राथमिक स्तर के लेखक दल ने पिछले वर्ष कक्षा 6 के लिए गणित की एक पाठ्यपुस्तक विकसित की। कक्षा 7 के लिए गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तक इसी शृंखला की अगली पुस्तक है। इस पाठ्यपुस्तक में भी शृंखला की पहली पुस्तक की तरह निम्नलिखित बातों का विशेष ध्यान रखा गया है:

- ज्ञान की नवीन विचारधारा का अविर्भाव।
- उभरती हुई किनारे काटती प्रौद्योगिकी द्वारा गणित को दी गई चुनौतियाँ।
- अंतिम परंतु अनावश्यक नहीं, पूर्व पाठ्यपुस्तक के प्रयोक्ताओं से प्राप्त पुनर्निवेशन।

इस पुस्तक को तैयार करने में बहुत अधिक प्रयत्न किए गए हैं। सर्वप्रथम विभिन्न लेखकों द्वारा तैयार की गई प्रारूप सामग्री पर लेखक दल के सदस्यों ने परस्पर चर्चा की और इस सामग्री को उस पर प्राप्त टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर संशोधित किया गया। इस संशोधित चर्चाओं में विद्यालयों में पढ़ाने वाले दो शिक्षकों सरस्वती कुलकर्णी एवं अशोक कुमार गुप्ता की भी सहायता ली गई। सामग्री को फिर एक समीक्षा कार्यशाला में शिक्षकों एवं विशेषज्ञों के एक समूह के सम्मुख रखा गया। इस समीक्षा कार्यशाला के प्रतिभागियों द्वारा दी गई टिप्पणियों एवं सुझावों के आधार पर पांडुलिपि को अंतिम रूप प्रदान किया गया।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

- जहाँ तक संभव हो सका है, विद्यार्थियों को प्रत्येक विषय का परिचय उनके आस-पास के परिवेश से संबंधित प्रेरक उदाहरणों के माध्यम से कराया गया है।
- पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्र, हल किए गए उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं। ऐसा सोच-समझकर किया गया है ताकि विद्यार्थी में अवधारणाओं को बेहतर ढंग से समझकर प्रश्नों को बेहतर ढंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि की जा सके।
- गणितीय तथ्यों की (पुन:) खोज करने और आरेखण एवं मापने के लिए दक्षता के विकास हेतु अनेक क्रियाकलाप सुझाए गए हैं।
- राष्ट्रीय एकता, पर्यावरण संरक्षण, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति, छोटे परिवार के मानदंडों का अनुपालन करने, लिंग भेदभाव मिटाने की आवश्यकता पर जागरूकता विकसित करने के लिए कुछ शाब्दिक समस्याओं को सम्मिलित किया गया है।

विद्यार्थियों के मस्तिष्क में इन शाब्दिक समस्याओं के प्रमुख संदेश पहुँचने चाहिए तथा शिक्षण के समय अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए।

- पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में, महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों की एक सूची शीर्षक 'याद रखने योग्य बातें' के रूप में दी गई है।
- प्रत्येक एकक के अंत में ऐतिहासिक संदर्भों, विशेषकर भारतीय योगदानों का शीर्षक 'अतीत के झरोखे से' के रूप में उल्लेख किया गया है।

मैं प्रो. जे.एस. राजपूत, निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् का धन्यवाद करती हूँ जिन्होंने पाठ्यचर्या नवीनीकरण की इस परियोजना का शुभारंभ किया और गणित शिक्षा में सुधार हेतु इस राष्ट्रीय प्रयास में हमें सम्मिलित होने का अवसर प्रदान किया जिससे हम गणित शिक्षा के सुधार के प्रति अपना व्यावसायिक ऋण चुका सकें। मैं प्रो. आर.डी. शुक्ल, अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग को भी उनके गतिशील नेतृत्व, इस कार्य में भरपूर सहयोग देने तथा अन्य सुविधाएँ उपलब्ध कराने के लिए धन्यवाद देती हूँ। लेखक दल के अन्य सदस्य प्रो. बी. देवकीनन्दन, श्री महेन्द्र शंकर, श्रीमती श्रीजता दास, प्रो. सुंदर लाल एवं प्रो. सुरजा कुमारी और समीक्षा कार्यशाला के सभी प्रतिभागी भी धन्यवाद के पात्र हैं।

इस लंबी प्रस्तावना को समाप्त करते हुए, मैं बार-बार और अधिकतर दी जाने वाली चेतावनी का उल्लेख करना चाहूँगी कि किसी भी विषय में कोई भी पुस्तक अंतिम नहीं हो सकती। हमने अपनी ओर से उपलब्ध सीमित समय में अच्छी से अच्छी सामग्री प्रदान करने का भरसक प्रयास किया है, फिर भी हम जानते हैं कि इसमें सुधार हो सकता है। इसमें सुधार हेतु सुझाव/टिप्पणियों का स्वागत है। मुझे आशा है कि पाठक इस पुस्तक को पढ़ते समय उतना ही आनंद लेंगे जितना हमें इसके लिखते समय प्राप्त हुआ है।

आशा रानी सिंगल
अध्यक्ष
लेखक दल

पाठ्यपुस्तक के हिंदी संस्करण की समीक्षा कार्यगोष्ठी के सदस्य

आशा रानी सिंगल
प्रोफेसर, रिटायर्ड
ए-1, स्टाफ रेसीडेन्सेस
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय, मेरठ

अजय कुमार सिंह
टी.जी.टी. (गणित)
रामजस सीनियर माध्यमिक विद्यालय
चाँदनी चौक, दिल्ली

अशोक कुमार गुप्ता
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय विद्यालय, जी.पी. ब्लाक
पीतमपुरा, दिल्ली

बी. देवकीनंदन
प्रोफेसर, रिटायर्ड एन.सी.ई.आर.टी.
सी-9/9167, पाकेट 9, सेक्टर सी
वसंत कुंज, नई दिल्ली

ज्योति झाम्ब
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार, दिल्ली

राज कुमार भारद्वाज
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय विद्यालय, के-1
मंगोलपुरी, दिल्ली

आर एस चित्तोड़िया
टी.जी.टी. (गणित)
डेमोंसेट्रेशन स्कूल, आर.आई.ई., अजमेर

सरिता रेवरी
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक
विद्यालय नं. 1
रूप नगर, दिल्ली

सविता गर्ग
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय
बी-3, पश्चिम विहार
नई दिल्ली

सुमित्रा अहलावत
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक विद्यालय
जे.जे. कालोनी-II, नांगलोई, दिल्ली

सुंदर लाल
प्रोफेसर एवं *अध्यक्ष*, गणित विभाग
इंसटीट्यूट ऑफ बेसिक साइंसेस
बी.आर. अम्बेडकर विश्वविद्यालय
खंधारी, आगरा

उर्मिला बधवा
रिटायर्ड टी.जी.टी. (गणित)
ए 1/193, जनकपुरी
नई दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

सुरजा कुमारी, *प्रोफेसर*
महेन्द्र शंकर, *वरिष्ठ प्रवक्ता* (***समन्वयक***)

पाठ्यपुस्तक समीक्षा कार्यगोष्ठी के सदस्य

आशा रानी सिंगल *(**अध्यक्ष**, लेखक दल)*
प्रोफेसर रिटायर्ड
ए–1, स्टाफ रेसिडेंसेस
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय, मेरठ

अशोक कुमार गुप्ता
टी.जी.टी. (गणित) सर्वोदय विद्यालय
जी.पी. ब्लाक, पीतमपुरा, दिल्ली

बी. देवकीनन्दन
रिटायर्ड प्रोफेसर, एन.सी.ई.आर.टी.
सी–9/9167, पॉकेट 9, सेक्टर सी
बसंत कुंज, नई दिल्ली

बी. जयरामा भट्ट
टी.जी.टी. (गणित)
डेमोंसट्रेशन स्कूल, आर.आई.ई. मैसूर

बी. कृष्णनन
टी.जी.टी. (गणित)
केंद्रीय विद्यालय, आइसलेंड ग्राऊँड
पल्लावन सलाइ, चैन्नै

विक्रम सिंह अहलावत
टी.जी.टी. (गणित)
सैनिक स्कूल, रीवा

ज्योति झाम्ब
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार, दिल्ली

एन. साहनी
टी.जी.टी. (गणित)
बी.एस.एफ. सीनियर माध्यमिक विद्यालय
श्रीगंगानगर

पूनम चावला
टी.जी.टी. (गणित)
आवर लेडी ऑफ फातिमा कान्वेंट
माध्यमिक विद्यालय
डी.एल.एफ., सेक्टर 14, गुड़गाँव

आर. के. पांडे
टी.जी.टी. (गणित)
डेमोंसट्रेशन स्कूल, आर.आई.ई.
श्यामला हिल्स, भोपाल

रणवीर सिंह तेवतिया
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय बाल विद्यालय नं. 1
सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

रुचि सलारिया
टी.जी.टी. (गणित)
केंद्रीय विद्यालय नं. 4
दिल्ली कैंट

एस. भुवाना
टी.जी.टी. (गणित)
डी.टी.ई.ए. सीनियर माध्यमिक विद्यालय
आर.के. पुरम, नई दिल्ली

सरस्वती कुलकर्णी
टी.जी.टी. (गणित)
एहलकॉन पब्लिक स्कूल
मयूर विहार फेस–1, दिल्ली

सरिता रेवरी
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक
विद्यालय नं. 1, रूप नगर, दिल्ली

सत्य नारायण चौरसिया
प्रोफेसर (गणित)
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, इलाहाबाद

सविता गर्ग
टी.जी.टी. (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय
बी–3, पश्चिम विहार, नई दिल्ली

श्रीजता दास
प्रवक्ता (गणित)
एस.सी.ई.आर.टी., डिफेंस कालोनी,
नई दिल्ली

सुमित्रा अहलावत
टी.जी.टी. (गणित)
राजकीय बालिका सीनियर माध्यमिक विद्यालय
जे.जे. कालोनी–II, नांगलोई
नई दिल्ली

सुन्दर लाल
प्रोफेसर एवं *अध्यक्ष*, गणित विभाग
इंसटीट्यूट ऑफ बेसिक साइंसेज
बी आर अम्बेडकर विश्वविद्यालय
खंधारी, आगरा

सुषमा नन्दा
टी.जी.टी. (गणित)
दिल्ली पब्लिक स्कूल, सेक्टर 30
नोएडा

उर्मिला वधवा
टी.जी.टी. रिटायर्ड *(गणित)*
ए–3/193, जनकपुरी, नई दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

हुकुम सिंह, *प्रोफेसर*
सुरजा कुमारी, *प्रोफेसर*
महेन्द्र शंकर, *वरिष्ठ प्रवक्ता* (**समन्वयक**)

विषय सूची

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्त्तव्य

अनुच्छेद 51क

मूल कर्त्तव्य - भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्त्तव्य होगा कि वह -

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे,

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे,

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे,

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे,

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों,

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे,

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे,

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे,

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे, और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू सके।

परिमेय संख्याएँ

अध्याय 1

1.1 भूमिका

कक्षा छः में, हमने प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों का अध्ययन किया था। इससे पूर्व हम भिन्नों का भी अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में, हम एक नए संख्या निकाय, अर्थात् परिमेय संख्याओं के निकाय का अध्ययन करेंगे। इन संख्याओं को हम भिन्नों के आधार पर प्रस्तुत करेंगे। इन संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना सीखेंगे। दो परिमेय संख्याओं को समान दिखाना, दो परिमेय संख्याओं की तुलना करना तथा परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान ज्ञात करना भी हम इसी अध्याय में सीखेंगे। चूँकि परिमेय संख्याओं को हम पहले पढ़ी जा चुकी भिन्न संख्याओं के आधार पर प्रस्तुत करना चाहते हैं, अतः हम भिन्नों के बारे में कुछ तथ्य दोहराना चाहेंगे।

1.2 भिन्न संख्याएँ : एक पुनरावलोकन

भिन्न $\frac{3}{5}, \frac{10}{7}$ जैसी वे संख्याएँ होती हैं जो $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखी जाती हैं। यहाँ p तथा q दोनों प्राकृत संख्याएँ हैं। संख्या p को भिन्न का *अंश* (*numerator*) तथा q को *हर* (*denominator*) कहते हैं। यदि भिन्न का अंश, हर से छोटा है, तो भिन्न को *उचित भिन्न* (*proper fraction*) कहते हैं। अंश के बड़ा होने की दशा में भिन्न *विषम भिन्न* (*अनुचित भिन्न, improper fraction*) कहलाती है। $\frac{10}{7}$ जैसी विषम भिन्न को $1\frac{3}{7}$ के रूप में भी लिखा जाता है। इस प्रकार की संख्याएँ *मिश्रित संख्याएँ* (*mixed numbers*) कहलाती हैं।

यदि भिन्न $\frac{p}{q}$ में p तथा q का 1 के अतिरिक्त कोई सार्व भाजक नहीं है, तो $\frac{p}{q}$ *सरलतम या लघुतम* (*निम्नतम*) पदों (*lowest terms*) वाली भिन्न कहलाती है। यदि p एवं q का एक सार्व भाजक t है, तो $p = m \times t,\ q = n \times t$ लिखने पर हम देखते हैं कि $\frac{p}{q} = \frac{m \times t}{n \times t} = \frac{m}{n}$। इस प्रकार, $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{m}{n}$ *तुल्य* (*equivalent*) *भिन्न* हैं।

उदाहरण के लिए,

$$\frac{50}{100}=\frac{1\times 50}{2\times 50}=\frac{1}{2}$$

अतः, $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{50}{100}$ तुल्य भिन्न हैं। इसी प्रकार, $\frac{300}{900}, \frac{20}{60}, \frac{17}{51}$, सभी तुल्य भिन्न हैं।

प्रत्येक भिन्न संख्या $\frac{p}{q}$, जो लघुतम पदों में नहीं है, एक लघुतम पद वाली भिन्न $\frac{m}{n}$ के तुल्य होती है। इसके लिए, हम अंश एवं हर का म.स. निकालते हैं और इस म.स. से अंश एवं हर को विभाजित कर तुल्य भिन्न प्राप्त कर लेते हैं । भिन्नें $\frac{15}{25}, \frac{51}{85}, \frac{111}{185}, \frac{240}{400}$ सभी तुल्य हैं तथा सभी लघुतम पदों वाली भिन्न $\frac{3}{5}$ के तुल्य हैं।

यदि $\frac{p}{q}$ एक भिन्न संख्या है, तब किसी भी शून्येतर t के लिए भिन्न $\frac{p\times t}{q\times t}$, $\frac{p}{q}$ के तुल्य या समान होती है। इस तथ्य का प्रयोग कर, हम दो भिन्नों की तुलना कर सकते हैं। यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{q}$ दो समान हर वाली भिन्न संख्याएँ हैं, तो हम उनके अंशों की तुलना द्वारा इन भिन्नों की तुलना कर सकते हैं। यदि $p<r$ है, तो हम कहते हैं कि $\frac{p}{q}<\frac{r}{q}$ है।

यदि भिन्नों $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ में हर अलग-अलग हैं, तो इन भिन्नों को समान हर वाली भिन्नों के रूप में लिखा जा सकता है। यथा

$$\frac{p}{q}=\frac{p\times s}{q\times s} \text{ तथा } \frac{r}{s}=\frac{r\times q}{s\times q}$$

अब अंशों $p\times s$ तथा $r\times q$ की तुलना कर, हम कह सकते हैं कि

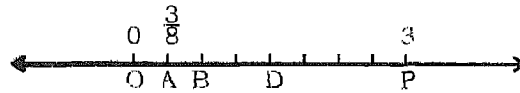
(i) $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$, यदि $p\times s<r\times q$,

(ii) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, यदि $p \times s = r \times q$, तथा

(iii) $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, यदि $p \times s > r \times q$ ।

इस प्रकार, हम देख सकते हैं कि $\frac{4}{11} < \frac{6}{11}, \frac{5}{9} = \frac{35}{63}$ तथा $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$ है।

भिन्नों को हम संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं । मान लीजिए हमें $\frac{3}{8}$ को संख्या रेखा पर दिखाना है।

इसके लिए हम एक रेखा खींचते हैं और उस पर एक बिंदु O चिह्नित कर लेते हैं। यह बिंदु O पूर्ण संख्या शून्य को दर्शाता है। मान लीजिए बिंदु P संख्या 3 को दर्शाता है। अब रेखाखंड OP को 8 बराबर भागों में बाँट लेते हैं। इसके लिए OP को D पर समद्विभाजित करते हैं, फिर OD को B पर तथा OB को A पर समद्विभाजित करते हैं (आकृति 1.1)।

आकृति 1.1

यहाँ OA रेखाखंड OP का $\frac{1}{8}$ भाग है। चूँकि OP संख्या 3 को निरूपित करता है, अतः रेखाखंड OA संख्या 3 का $\frac{1}{8}$, अर्थात् $\frac{3}{8}$ निरूपित करता है। अतः, रेखा पर बिंदु O शून्य को तथा बिंदु A भिन्न $\frac{3}{8}$ को निरूपित करते हैं।

इस प्रकार, प्रत्येक भिन्न $\frac{p}{q}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं।

1.3 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

कक्षा 6 में, आपने केवल एक चर वाली सरल समीकरणों का हल सीखा था। मान लीजिए हमारा समीकरण $2x - 4 = 0$ है। हम देख सकते हैं कि पूर्णांक 2 इस समीकरण का हल है। लेकिन यदि हमारा समीकरण $2x - 3 = 0$ है, तो कोई भी पूर्णांक इस समीकरण का हल नहीं हो सकता। केवल भिन्न $x = \frac{3}{2}$ ही समीकरण को संतुष्ट करती है।
अब मान लें कि हमारा समीकरण

$$2x + 3 = 0 \text{ है।}$$

क्या कोई पूर्णांक या भिन्न इस समीकरण का हल हो सकता है? नहीं। पूर्णांकों अथवा भिन्नों में इस समीकरण का कोई हल नहीं है। इस प्रकार के समीकरणों के हल प्राप्त करने के लिए, हमें अपने संख्या निकायों (पूर्णांक एवं भिन्न) का विस्तार करना पड़ेगा। पूर्णांकों के निकाय के विस्तार की आवश्यकता को हम एक दूसरे दृष्टिकोण से भी देख सकते हैं। संख्या रेखा पर −3 को दर्शाने वाला बिंदु P′ है । जिस प्रकार हमने OP को 8 भागों में बाँटा था, उसी प्रकार, OP′ को भी हम बिंदुओं A′, B′, ... आदि की सहायता से 8 भागों में बाँट सकते हैं। यहाँ A′ क्या निरूपित करता है? जिस प्रकार A, $\frac{3}{8}$ निरूपित करता है, उसी प्रकार, A′, $\frac{-3}{8}$ निरूपित करता है । परंतु $\frac{-3}{8}$ न तो पूर्णांक है और न ही कोई भिन्न। अत: हमें अपने संख्या निकाय के विस्तार की आवश्यकता है जिसमें 'भिन्न के समान' $\frac{-3}{8}$ जैसी संख्याएँ भी सम्मिलित हों।

1.4 परिमेय संख्याएँ

भिन्न $\frac{p}{q}$ में p एवं q धनात्मक पूर्णांक होते हैं। यदि p एवं q को हम कोई भी पूर्णांक लें तथा q शून्येतर रहे, तो इस प्रकार प्राप्त विस्तृत संख्या निकाय में

$$\frac{-3}{4}, \frac{3}{-4}, \frac{13}{-9}, \frac{16}{1}, \frac{-28}{-25}, \frac{0}{100}$$

जैसी सभी संख्याएँ सम्मिलित हैं, परंतु $\frac{5}{0}, \frac{97}{0}$ जैसी संख्याएँ, जिनके हर में शून्य है, सम्मिलित नहीं हैं। एक संख्या जो $\frac{p}{q}$ के रूप में हो, जहाँ p एवं q दो पूर्णांक हैं तथा

$q \neq 0$ है, *परिमेय संख्या (rational number)* कहलाती है। परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में p अंश (*numerator*) तथा q हर (*denominator*) कहलाता है। परिमेय संख्या $\frac{-3}{4}$ में -3 अंश तथा 4 हर है, जबकि $\frac{3}{-4}$ में हर -4 तथा अंश 3 है। इसी प्रकार, 0 संख्या $\frac{0}{100}$ का अंश है तथा 1 संख्या $\frac{16}{1}$ का हर है।

इस परिभाषा के अनुसार, प्रत्येक भिन्न एक परिमेय संख्या है, परंतु $\frac{-3}{4}$ जैसी अनेक परिमेय संख्याएँ हैं जो भिन्न नहीं हैं। केवल वे ही परिमेय संख्याएँ भिन्न होती हैं जिनमें अंश एवं हर दोनों धनात्मक पूर्णांक होते हैं।

जिस प्रकार एक धनात्मक पूर्णांक x भिन्न $\frac{x}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है, उसी प्रकार कोई भी पूर्णांक y (धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य) परिमेय संख्या $\frac{y}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार पूर्णांक 100, -6, 0 सभी परिमेय संख्याएँ माने जा सकते हैं, क्योंकि ये क्रमशः परिमेय संख्याओं $\frac{100}{1}$, $\frac{-6}{1}$ एवं $\frac{0}{1}$ को निरूपित करते हैं।

दो परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ *और* $\frac{r}{s}$ *को तुल्य (equivalent) कहते हैं, यदि* $p \times s = q \times r$ *हो।*

इस प्रकार, परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{2}{4}$ तुल्य हैं। तुल्य परिमेय संख्याएँ एक ही संख्या को निरूपित करती हैं। इस प्रकार $\frac{15}{5}$, $\frac{90}{30}$ आदि सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{1}$ को ही निरूपित करती हैं। याद कीजिए कि यदि $\frac{p}{q}$ एक भिन्न है, तो भिन्न $\frac{2p}{2q}$ भिन्न $\frac{p}{q}$ के तुल्य है।

इसी प्रकार, परिमेय संख्या $\frac{2p}{2q}$ परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के तुल्य है। वास्तव में, किसी भी शून्येतर m के लिए, परिमेय संख्या $\frac{m \times p}{m \times q}$ संख्या $\frac{p}{q}$ के तुल्य है। इस प्रकार, $\frac{-30}{16}$ संख्या $\frac{-15}{8}$ के तुल्य है तथा $\frac{42}{24}, \frac{21}{12}, \frac{14}{8}, \frac{7}{4}, \frac{-7}{-4}, \frac{-14}{-8}, \frac{-21}{-12}, \frac{-42}{-24}$ सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{7}{4}$ के तुल्य हैं।

भिन्नों के समान ही परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ *सरलतम* या *लघुतम पदों* (*रूप*) में कहलाती है, यदि p एवं q में कोई सार्व भाजक नहीं होता, अर्थात् p और q का म.स. 1 होता है। संख्याएँ $\frac{3}{7}, \frac{-103}{5}, \frac{19}{-115}$ सभी लघुतम पदों वाली परिमेय संख्याएँ हैं। $\frac{15}{70}$ लघुतम पदों में नहीं है, क्योंकि अंश एवं हर का 5 सार्व भाजक है। इसे लघुतम पदों में इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{15}{70} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{2 \times 7} = \frac{3}{14}$$

और इस प्रकार $\frac{3}{14}$ लघुतम पदों में है। सभी परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ लघुतम पदों में लिखी जा सकती हैं। इस प्रक्रिया के लिए, हम निम्न चरणों का प्रयोग करेंगे:

चरण 1: p एवं q का म.स. m ज्ञात कीजिए। यदि $m = 1$ है, तो $\frac{p}{q}$ लघुतम पदों में है।

चरण 2: यदि $m \neq 1$ है, तो m से p तथा q को अलग-अलग भाग देते हैं। यदि $p' = p \div m$ तथा $q' = q \div m$ है, तो परिमेय संख्या $\frac{p'}{q'}$ संख्या $\frac{p}{q}$ का लघुतम पद वाला रूप है।

उदाहरण 1: ज्ञात कीजिए निम्न परिमेय संख्याओं में कौन-सी संख्याएँ लघुतम पदों में हैं। जो नहीं हैं, उन्हें लघुतम पदों वाले रूप में लिखिए।

(i) $\frac{12}{16}$ (ii) $\frac{17}{79}$ (iii) $\frac{-24}{36}$ (iv) $\frac{-60}{-72}$

हल: (i) यहाँ $12 = 2 \times 2 \times 3$ तथा $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ है। इस प्रकार, 12 तथा 16 का म.स. $= 2 \times 2 = 4$ (चरण 1)

अत:, $\frac{12}{16}$ लघुतम पदों में नहीं है।

$12 \div 4 = 3, \quad 16 \div 4 = 4$ (चरण 2)

अत:, $\frac{3}{4}$ संख्या $\frac{12}{16}$ का लघुतम पदों वाला रूप है।

(ii) यहाँ 17 तथा 79 का म.स. 1 है। अत:, $\frac{17}{79}$ लघुतम पदों में है।

(iii) 24 तथा 36 का म.स. 12 है। अत:, $\frac{-24}{36}$ लघुतम पदों में नहीं है।

$$\frac{-24}{36} = \frac{-2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{-2}{3}$$

इस प्रकार, $\frac{-2}{3}$ लघुतम पद वाली तुल्य संख्या है।

(iv) 60 तथा 72 का म.स. 12 है। अत:, संख्या $\frac{-60}{-72}$ लघुतम रूप में नहीं है।

$$\frac{-60}{-72} = \frac{-1 \times 5 \times 12}{-1 \times 6 \times 12} = \frac{5}{6} \text{ (लघुतम रूप में)}$$

जिस प्रकार हम किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर को एक सार्व गुणनखंड (यदि कोई है तो) से विभाजित कर तुल्य परिमेय संख्या प्राप्त कर सकते हैं, उसी प्रकार अंश एवं हर को एक सार्व गुणज से गुणा करके भी तुल्य परिमेय संख्या प्राप्त की जा सकती है।

इस प्रकार,

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\left(=\frac{2\times 2}{3\times 2}\right), \frac{-8}{-12}\left(=\frac{2\times(-4)}{3\times(-4)}\right) \text{ आदि}$$

सभी तुल्य हैं और एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करती हैं। इस प्रकार,

कोई भी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ एक तुल्य परिमेय संख्या $\frac{p\times k}{q\times k}$ से प्रतिस्थापित की जा सकती है, जहाँ k कोई भी धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्णांक है।

उदाहरण 2: रिक्त स्थान भरिए:

(i) $\frac{5}{-7}=\frac{\cdots}{35}=\frac{\cdots}{-77}$

(ii) $\frac{7}{13}=\frac{35}{\cdots}=\frac{-63}{\cdots}$

(iii) $\frac{90}{165}=\frac{-6}{\cdots}=\frac{\cdots}{-55}$

हल: (i) $35 \div (-7) = -5$, अर्थात् $35 = (-7)\times(-5)$

अत:, $\frac{5}{-7}=\frac{5\times(-5)}{(-7)\times(-5)}=\frac{-25}{35}$

इसी प्रकार, $-77 = -7\times 11$, अर्थात् $\frac{5}{-7}=\frac{5\times 11}{(-7)\times 11}=\frac{55}{-77}$

$$\therefore \quad \frac{5}{-7}=\frac{-25}{35}=\frac{55}{-77}$$

(ii) $35 = 7\times 5$ है। अत:, $\frac{7}{13}=\frac{7\times 5}{13\times 5}=\frac{35}{65}$

$-63 = 7\times(-9)$ है। अत:, $\frac{7}{13}=\frac{7\times(-9)}{13\times(-9)}=\frac{-63}{-117}$

$$\therefore \quad \frac{7}{13}=\frac{35}{65}=\frac{-63}{-117}$$

(iii) ध्यान दीजिए (i) एवं (ii) में संख्याएँ $\frac{5}{-7}$ और $\frac{7}{13}$ पहले ही लघुतम पदों में हैं।

यहाँ पहले हम $\frac{90}{165}$ को लघुतम पदों में लिखेंगे। अब

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ तथा $165 = 3 \times 5 \times 11$

इस प्रकार, 90 और 165 का म.स. 15 है।

अतः, $\frac{90}{165} = \frac{6 \times 15}{11 \times 15} = \frac{6}{11}$

अब $-6 = 6 \times (-1)$ और इस प्रकार, $\frac{6}{11} = \frac{6 \times (-1)}{11 \times (-1)} = \frac{-6}{-11}$

इसी प्रकार, $-55 = 11 \times (-5)$ और $\frac{6}{11} = \frac{6 \times (-5)}{11 \times (-5)} = \frac{-30}{-55}$

अतः, $\frac{90}{165} = \frac{-6}{-11} = \frac{-30}{-55}$

टिप्पणियाँ: 1. यदि लघुतम पदों वाली परिमेय संख्या का हर धनात्मक है, तो हम इसे संख्या का *मानक रूप* (*standard form*) कहते हैं। इस प्रकार, $\frac{-26}{39}$ का मानक रूप $\frac{-2}{3}$ है।

$\frac{3}{-4}$ यद्यपि लघुतम पदों वाला रूप है, परंतु मानक रूप नहीं है। हम इसे मानक रूप में $\frac{3}{-4} = \frac{3 \times (-1)}{-4 \times (-1)} = \frac{-3}{4}$ के रूप में लिख कर व्यक्त कर सकते हैं।

2. हमने देखा कि $\frac{3}{-4}$ तथा $\frac{-3}{4}$ तुल्य परिमेय संख्याएँ हैं। वास्तव में, यदि p, एवं q धनात्मक पूर्णांक हैं, तो $\frac{p}{-q} = \frac{p \times (-1)}{-q \times (-1)} = \frac{-p}{q}$ तथा $\frac{-p}{-q} = \frac{-p \times (-1)}{-q \times (-1)} = \frac{p}{q}$, अर्थात्

$\frac{p}{-q}$, $\frac{-p}{q}$ के तुल्य है तथा $\frac{-p}{-q}$, $\frac{p}{q}$ के तुल्य है। दूसरे शब्दों में, ऋणात्मक हर वाली कोई

भी परिमेय संख्या धनात्मक हर वाली तुल्य परिमेय संख्या से प्रतिस्थापित की जा सकती है। इस तथ्य के परिपेक्ष में हम कह सकते हैं *कि परिमेय संख्या* $\frac{p}{q}$ *के रूप में लिखी जा सकने वाली वह संख्या होती है, जिसमें* p *एक पूर्णांक होता है तथा* q *एक धनात्मक पूर्णांक होता है।*

प्रश्नावली 1.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं के अंश लिखिए:

   (i) $\frac{12}{23}$ (ii) $\frac{-27}{53}$ (iii) $\frac{99}{-1000}$ (iv) $\frac{1}{101}$ (v) $\frac{-67}{-167}$

2. प्रश्न 1 में दी गई परिमेय संख्याओं के हर लिखिए:

3. वे परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनके अंश एवं हर क्रमशः हैं:

   (i) 2^3 तथा 3^2 (ii) $5 - 49$ तथा $55 - 9$

   (iii) $28 + 79$ तथा $79 - 28$ (iv) 5×3 तथा $16 \div 8$

4. निम्न परिमेय संख्याओं को लघुतम पदों के रूप में लिखिए:

   (i) $\frac{2}{10}$ (ii) $\frac{-36}{180}$ (iii) $\frac{-64}{256}$

   (iv) $\frac{91}{364}$ (v) $\frac{24}{64}$ (vi) $\frac{44}{428}$

5. संख्या $\frac{1}{4}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में लिखिए जिसका हर हो:

   (i) 20 (ii) 36 (iii) -80 (iv) -100 (v) 40000

6. संख्या $\frac{2}{5}$ को ऐसी तुल्य परिमेय संख्या के रूप में लिखिए जिसका अंश हो:

   (i) -56 (ii) 154 (iii) -750 (iv) 500 (v) -6250

7. रिक्त स्थान भरिए:

   (i) $\frac{2}{3} = \frac{....}{135}$ (ii) $\frac{....}{4} = \frac{90}{120}$ (iii) $\frac{5}{....} = \frac{90}{216}$ (iv) $\frac{9}{16} = \frac{90}{....}$

8. निम्न में से प्रत्येक में ऐसी तुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनके हर समान हों:

(i) $\frac{5}{6}$ और $\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ और $\frac{7}{12}$

(iii) $\frac{4}{5}, \frac{17}{20}, \frac{23}{40}$ और $\frac{11}{16}$ (iv) $\frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{9}{14}$ और $\frac{20}{21}$

9. मानक रूप में लिखिए:

(i) $\frac{-144}{-504}$ (ii) $\frac{140}{490}$

(iii) $\frac{-132}{-330}$ (iv) $\frac{240}{-840}$

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $\frac{-3}{5}$ एक भिन्न है।

(ii) $2\frac{7}{9}$ एक मिश्रित संख्या है।

(iii) $\frac{24}{44}$ संख्या $\frac{2}{4}$ के तुल्य है।

(iv) $\frac{150}{1500}$ तुल्य है $\frac{1}{10}$ के।

(v) $\frac{-2}{3} < \frac{3}{-4}$ होता है, क्योंकि $-2 \times (-4) < 3 \times 3$ है।

(vi) समीकरण $8x + 8 = 0$ का हल एक पूर्णांक है।

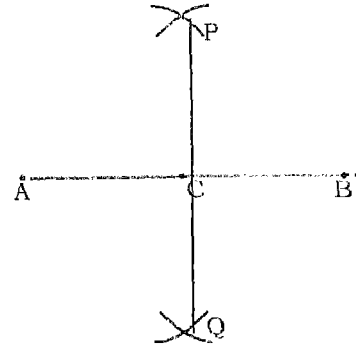
(vii) समीकरण $8x + 4 = 0$ का हल एक भिन्न संख्या है।

(viii) $\frac{1}{0}$ परिमेय संख्या नहीं है।

(ix) परिमेय संख्या $\frac{1}{9}$ लघुतम पदों में है, परंतु $\frac{9}{1}$ लघुतम पदों में नहीं है।

(x) यदि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ मानक रूप में है, तो परिमेय संख्या $\frac{q}{p}$ भी मानक रूप में है।

1.5 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

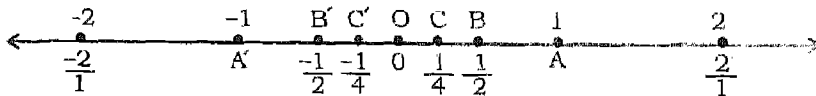
कक्षा छः में, हमने रेखाखंड का समद्विभाजन करना सीखा था। मान लीजिए AB एक रेखाखंड दिया है। A को केंद्र मान कर तथा AB के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर AB के दोनों ओर एक-एक चाप खींचिए। अब इसी त्रिज्या को लेकर, परंतु B को केंद्र मान कर पुनः AB के दोनों ओर दो चाप खींचिए जो पहले बने दोनों चापों को बिंदुओं P एवं Q पर काटें। PQ को मिलाइए जो AB को C पर काटे। इस प्रकार, AB पर प्राप्त बिंदु C ही AB का मध्य-बिंदु है (आकृति 1.2)।

आकृति 1.2

समद्विभाजन की यह प्रक्रिया दोहराने पर हम AB को $2 \times 2 = 4$ बराबर भागों में तथा पुनः दोहराकर $4 \times 2 = 8$ बराबर भागों में बाँट सकते हैं। इसी प्रकार, AB के 64, 256 आदि बराबर भाग किए जा सकते हैं।

क्या AB को 3 बराबर भागों में बाँटा जा सकता है? वास्तव में, हम AB को जितने चाहें उतने ही बराबर भागों में विभाजित कर सकते हैं। हम इस रचना के विस्तार में नहीं जाएँगे, परंतु इस तथ्य को परिमेय संख्याओं के संख्या रेखा पर निरूपण के लिए प्रयोग अवश्य करेंगे।

मान लीजिए कि हमें संख्या रेखा पर $\frac{2}{1}, \frac{-2}{1}$ जैसी परिमेय संख्याओं का निरूपण करना है। हम जानते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{2}{1}$ तथा पूर्णांक 2 में कोई अंतर नहीं है तथा $\frac{-2}{1}$ तथा −2 समान संख्याएँ हैं। पूर्णांकों का संख्या रेखा पर निरूपण हम पहले ही सीख चुके हैं। अतः वे सभी परिमेय संख्याएँ, जिनका हर 1 है, संख्या रेखा पर निरूपित की जा सकती हैं।

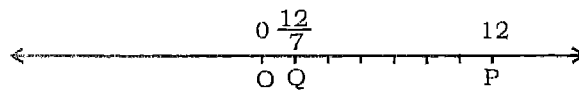
-2 −1 B′ C′ O C B 1 2

$\frac{-2}{1}$ A′ $\frac{-1}{2}$ $\frac{-1}{4}$ 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ A $\frac{2}{1}$

आकृति 1.3

मान लीजिए हमें $\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{4}$ जैसी परिमेय संख्याओं का निरूपण करना है (आकृति 1.3)। इसके लिए रेखा पर बिंदु A का चयन करते हैं जो पूर्णांक 1 को निरूपित करता है। अब रेखाखंड OA (O पूर्णांक शून्य को निरूपित करने वाला बिंदु है) को समद्विभाजित करते हैं और मध्य-बिंदु B प्राप्त करते हैं। चूँकि OB रेखाखंड OA का $\frac{1}{2}$ भाग है, अत: बिंदु B संख्या $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है। रेखाखंड OB को C पर समद्विभाजित करने पर प्राप्त बिंदु C संख्या $\frac{1}{4}$ को निरूपित करता है। इसी प्रकार, यदि A′ संख्या −1 को निरूपित करता है, तो OA′ का समद्विभाजक बिंदु B′, $\frac{-1}{2}$ को तथा OB′ का मध्य-बिंदु C′ संख्या $\frac{-1}{4}$ को निरूपित करता है। समद्विभाजन की प्रक्रिया को इसी प्रकार दोहराते हुए, हम उन सभी परिमेय संख्याओं को निरूपित कर सकते हैं जिनका अंश 1 एवं हर 2 की कोई घात है।

टिप्पणियाँ : 1. हमने एक विशेष प्रकार की परिमेय संख्याओं जैसे $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$ इत्यादि के निरूपण की विधि पर विचार किया है। परंतु तथ्य यह है कि कोई भी परिमेय संख्या, संख्या रेखा पर निरूपित की जा सकती है। यह इसलिए संभव है क्योंकि हम एक रेखाखंड को जितने चाहें उतने ही बराबर भागों में विभाजित कर सकते हैं। यदि हम $\frac{12}{7}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करना चाहते हैं, तो हम बिंदु P का चयन करते हैं जो रेखा पर 12 को निरूपित करता है।

0 $\frac{12}{7}$ 12

O Q P

आकृति 1.4

अब रेखाखंड OP को 7 बराबर भागों में विभाजित करते हैं। यदि O के दाईं ओर पहला विभाजक बिंदु Q है, तो रेखाखंड OQ की लंबाई OP की लंबाई की $\frac{1}{7}$ होगी तथा इस प्रकार बिंदु Q संख्या रेखा पर $\frac{12}{7}$ को निरूपित करेगा (आकृति 1.4)। यदि हम $\frac{-17}{9}$ को रेखा पर निरूपित करना चाहते हैं, तो O के बाईं ओर बिंदु P लीजिए जो −17 को निरूपित करता हो। अब रेखाखंड OP को 9 ाबर भागों में विभाजित कर O के बाईं ओर का पहला बिंदु Q प्राप्त कीजिए। बिंदु Q ही संख्या $\frac{-17}{9}$ को निरूपित करता है।

2. संख्या रेखा पर निरूपित करने से पूर्व परिमेय संख्या को मानक रूप में लिख लेना चाहिए। क्योंकि $\frac{p}{q}$ को निरूपित करने के लिए हमें p लंबाई के रेखाखंड को q बराबर भागों में बाँटना होता है, अतः q का धनात्मक होना आवश्यक है। संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{50}{100}$ एक ही बिंदु से निरूपित होंगे। परंतु $\frac{1}{2}$ के लिए हमें मात्र एक समद्विभाजन की आवश्यकता होगी, जबकि $\frac{50}{100}$ के लिए हमें 50 मात्रक लंबे रेखाखंड को 100 बराबर भागों में विभाजित करना पड़ेगा।

हम जानते हैं कि 0 (शून्य) एक परिमेय संख्या है, क्योंकि इसे $\frac{p}{q}$, जहाँ $p = 0$ तथा $q \neq 0$ है, के रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{-100} = \frac{0}{596}$ आदि। 0 के दाईं ओर की सभी संख्याएँ धनात्मक संख्याएँ हैं। इस प्रकार, $\frac{1}{9}, \frac{-15}{-19}, \frac{16}{87}, \frac{-106}{-141}$ सभी धनात्मक संख्याएँ हैं। 0 के बाईं ओर की सभी संख्याएँ ऋणात्मक हैं। इस प्रकार, $\frac{-3}{7}, \frac{-8}{139}, \frac{6}{-593}, \frac{802}{-9999}$ सभी ऋणात्मक संख्याएँ हैं। इस प्रकार, एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के लिए हम देखते हैं कि

1. $\frac{p}{q}$ शून्य है, यदि $p = 0$ है।

2. $\frac{p}{q}$ धनात्मक है, यदि p तथा q दोनों धनात्मक हैं अथवा p तथा q दोनों ऋणात्मक हैं।

3. $\frac{p}{q}$ ऋणात्मक है, यदि p धनात्मक तथा q ऋणात्मक है अथवा p ऋणात्मक तथा q धनात्मक है, अर्थात् p एवं q विपरीत चिह्नों वाले हैं ।

1.6 परिमेय संख्याओं में क्रम संबंध

आइए, दो परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ पर विचार करें और संख्या रेखा पर इन्हें निरूपित करें। यदि इनके निरूपण से एक ही बिंदु प्राप्त होता है, तो दोनों संख्याएँ एक ही हैं, अर्थात् बराबर हैं, अर्थात् $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$। परंतु $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ के बराबर न होने की दशा में ये बिंदु अलग-अलग होंगे। इस अवस्था में या तो $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ के बाईं ओर होगा या $\frac{r}{s}$ के दाईं ओर।

यदि $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ के बाईं ओर है, तो $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

तथा दाईं ओर होने की दशा में $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ होता है।

इस प्रकार, दो परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{s}$ के बीच

(i) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ या (ii) $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ या (iii) $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

संबंध होता है।

संख्या रेखा पर निरूपण के बिना भी भिन्नों के समान हम दो परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते हैं। यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ (मानक रूप में) के हर समान हैं, अर्थात् $s = q$ है, तो हम इनके अंशों की तुलना करते हैं।

यदि $p = r$ है, तो $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ होगा,

यदि $p < r$ है, तो $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ होगा, और

यदि $p > r$ है, तो $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ होगा।

इस प्रकार, $\frac{3}{25}$ तथा $\frac{7}{25}$ की तुलना से हमें प्राप्त होता है कि $\frac{3}{25} < \frac{7}{25}$, क्योंकि $3 < 7$ है। इसी प्रकार, $\frac{-7}{19}$ एवं $\frac{-11}{19}$ की तुलना के लिए हम -7 एवं -11 की तुलना करते हैं और संबंध $\frac{-7}{19} > \frac{-11}{19}$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, समान धनात्मक हर वाली परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{q}$ के लिए,

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{q} \text{ या } \frac{p}{q} < \frac{r}{q} \text{ या } \frac{p}{q} > \frac{r}{q}, \text{ यदि } p = r \text{ या } p < r \text{ या } p > r$$

अलग-अलग हर वाली परिमेय संख्याओं की हम कैसे तुलना करें? यदि $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ में $q \neq s$ है, तो हम इन संख्याओं को समान (धनात्मक) हर वाली तुल्य संख्याओं से प्रतिस्थापित करते हैं और फिर इनकी तुलना करते हैं। उदाहरण के लिए, $\frac{3}{5}$ एवं $\frac{7}{9}$ की तुलना के लिए $\frac{3}{5}$ के स्थान पर $\frac{3\times9}{5\times9} = \frac{27}{45}$, तथा $\frac{7}{9}$ के स्थान पर $\frac{7\times5}{9\times5} = \frac{35}{45}$ लिखते हैं। अब 27 एवं 35 की तुलना के अनुसार, $27 < 35$ है। अतः $\frac{27}{45} < \frac{35}{45}$ और इस प्रकार $\frac{3}{5} < \frac{7}{9}$ प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 3: निम्न युग्मों में परिमेय संख्याओं की तुलना कीजिए:

(i) $\frac{21}{15}$ एवं $\frac{19}{27}$ (ii) $\frac{-15}{22}$ एवं $\frac{-34}{29}$

(iii) $\frac{111}{-5}$ एवं $\frac{150}{-7}$ (iv) $\frac{13}{-8}$ एवं $\frac{-27}{12}$

हलः (i) $\frac{21}{15} = \frac{21\times27}{15\times27} = \frac{567}{405}$ तथा

$$\frac{19}{27} = \frac{19\times15}{27\times15} = \frac{285}{405}$$

चूँकि $567 > 285$ है, इसलिए $\frac{21}{15} > \frac{19}{27}$ हुआ।

(ii) $\frac{-15}{22} = \frac{-15\times29}{22\times29} = \frac{-435}{638}$ तथा

$$\frac{-34}{29} = \frac{-34\times22}{29\times22} = \frac{-748}{638}$$

चूँकि $-748 < -435$ है, इसलिए $\frac{-34}{29} < \frac{-15}{22}$ हुआ।

(iii) $\frac{111}{-5} = \frac{111\times(-7)}{-5\times(-7)} = \frac{-777}{35}$ तथा

$$\frac{150}{-7} = \frac{150\times(-5)}{-7\times(-5)} = \frac{-750}{35}$$

चूँकि $-777 < -750$ है, इसलिए $\frac{111}{-5} < \frac{150}{-7}$ हुआ।

(iv) $\frac{13}{-8} = \frac{13\times12}{-8\times12} = \frac{156\times(-1)}{-96\times(-1)} = \frac{-156}{96}$ तथा

$$\frac{-27}{12} = \frac{-27\times(-8)}{12\times(-8)} = \frac{216\times(-1)}{-96\times(-1)} = \frac{-216}{96}$$

चूँकि $-156 > -216$ है, इसलिए $\frac{13}{-8} > \frac{-27}{12}$ हुआ।

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में, हमने परिमेय संख्याओं को समान धनात्मक हर वाली संख्याओं में परिवर्तित किया है और इसके लिए हमने दोनों संख्याओं के हरों को गुणा किया है (यदि यह गुणनफल ऋणात्मक है, तो -1 से और गुणा किया है)। उदाहरण 3(i) में यह समान हर 15×27 है, जबकि 3 (iv) में समान हर $96 = [-8 \times 12 \times (-1)]$ है। आवश्यक नहीं है कि समान हर के लिए हम इतने बड़े पूर्णांकों का प्रयोग करें। हम इस समान हर के लिए दोनों हरों के ल.स. का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, (i) में $15 \times 27 = 405$ के स्थान पर हम 15 और 27 का ल.स. = 135 ले सकते हैं।

तब $$\frac{21}{15} = \frac{21 \times 9}{15 \times 9} = \frac{189}{135} \text{ तथा}$$

$$\frac{19}{27} = \frac{19 \times 5}{27 \times 5} = \frac{95}{135} \text{ है।}$$

चूँकि $189 > 95$ है, इसलिए $\frac{21}{15} > \frac{19}{27}$ हुआ।

उदाहरण 4: निम्न में रिक्त स्थानों पर < या > भरिए:

(i) $\frac{5}{8} \ldots \frac{11}{12}$ (ii) $\frac{-7}{60} \ldots \frac{5}{-40}$ (iii) $\frac{-4}{9} \ldots \frac{-3}{-7}$

हल: (i) 8 एवं 12 का ल.स. = 24 है। साथ ही, $24 = 8 \times 3 = 12 \times 2$ है।

इस प्रकार, $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$ तथा

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \times 2}{12 \times 2} = \frac{22}{24}$$

चूँकि $15 < 22$ है, इसलिए $\frac{5}{8} < \frac{11}{12}$ हुआ।

(ii) 60 तथा 40 का ल.स. = 120 है। साथ ही, $120 = 60 \times 2 = -40 \times (-3)$ है।

इस प्रकार, $\frac{-7}{60}=\frac{-7\times2}{60\times2}=\frac{-14}{120}$ तथा

$$\frac{5}{-40}=\frac{5\times(-3)}{-40\times(-3)}=\frac{-15}{120}$$

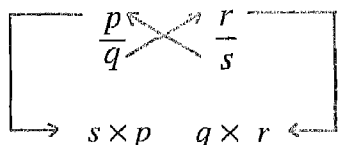
चूँकि $-14 > -15$ है, इसलिए $\frac{-7}{60}>\frac{5}{-40}$ हुआ।

(iii) संख्या $\frac{-4}{9}$ ऋणात्मक है तथा $\frac{-3}{-7}=\frac{3}{7}$ धनात्मक है।,

अतः, $\frac{-4}{9}<\frac{-3}{-7}$ हुआ।

असमान हरों वाली परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ की तुलना करने की एक और विधि इस प्रकार है:

(i) $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ को मानक रूप में एक पंक्ति में लिखिए।

(ii) $\frac{p}{q}$ के नीचे $s\times p$ तथा $\frac{r}{s}$ के नीचे $q\times r$ लिखिए।

$$\frac{p}{q} \quad \frac{r}{s}$$
$$s\times p \quad q\times r$$

(iii) पूर्णांकों $s\times p$ एवं $q\times r$ की तुलना कीजिए। यदि $s\times p<q\times r$ है, तो $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$ होगा।

उदाहरण 5: निम्न युग्मों की परिमेय संख्याओं की तुलना कीजिए:

(i) $\frac{3}{7}$ तथा $\frac{5}{11}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ तथा $\frac{-7}{19}$ (iii) $\frac{-17}{23}$ तथा $\frac{5}{-8}$

हलः (i) $\frac{3}{7} \times \frac{5}{11}$

$11 \times 3 \qquad 7 \times 5$

$(33) \qquad (35)$

क्योंकि $33 < 35$ है, अतः $\frac{3}{7} < \frac{5}{11}$ है।

(ii) $\frac{-3}{8} \times \frac{-7}{19}$

$19 \times (-3) \qquad 8 \times (-7)$

$(-57) \qquad (-56)$

क्योंकि $-57 < -56$ है, अतः $\frac{-3}{8} < \frac{-7}{19}$ है।

(iii) पहले हम $\frac{5}{-8}$ को मानक रूप $\frac{-5}{8}$ में लिखते हैं।

अब $\frac{-17}{23} \times \frac{-5}{8}$

$8 \times (-17) \qquad 23 \times (-5)$

$(-136) \qquad (-115)$

क्योंकि $-136 < -115$ है, अतः $\frac{-17}{23} < \frac{5}{-8}$ है।

1.7 किसी परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान

याद कीजिए कि एक पूर्णांक का निरपेक्ष मान एक पूर्णांक ही होता है। यदि पूर्णांक धनात्मक अथवा शून्य है, तो पूर्णांक का निरपेक्ष मान स्वयं वह पूर्णांक ही होता है, जबकि ऋणात्मक पूर्णांक का निरपेक्ष मान ऋणात्मक चिह्न हटाकर प्राप्त होने वाला पूर्णांक होता है। इस प्रकार, 5 का निरपेक्ष मान अर्थात् $|5| = 5$ होता है, जबकि -9 का निरपेक्ष मान अर्थात् $|-9| = 9$ होता है। इसी प्रकार,

$$|-101| = 101, |99| = 99 \text{ तथा } |0| = 0 \text{ आदि।}$$

यदि संख्या परिमेय है, तो इसके निरपेक्ष मान के बारे में क्या कहा जा सकता है ? पूर्णांकों

के समान ही परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान एक परिमेय संख्या ही होता है। इस निरपेक्ष मान का अंश संख्या के अंश का निरपेक्ष मान तथा निरपेक्ष मान का हर, संख्या के हर का निरपेक्ष मान होता है। दूसरे शब्दों में, यदि परिमेय संख्या $x = \frac{p}{q}$ है, तो निरपेक्ष मान $|x| = \left|\frac{p}{q}\right| = \frac{|p|}{|q|}$ होगा। इस प्रकार,

$$\left|\frac{3}{5}\right| = \frac{|3|}{|5|} = \frac{3}{5},$$

$$\left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{|-3|}{|5|} = \frac{3}{5},$$

$$\left|\frac{61}{-9}\right| = \frac{|61|}{|-9|} = \frac{61}{9},$$

$$\left|\frac{-73}{-87}\right| = \frac{|-73|}{|-87|} = \frac{73}{87},$$

$$\left|-\frac{173}{209}\right| = \left|\frac{-173}{209}\right| = \frac{|-173|}{|209|} = \frac{173}{209} \text{ आदि।}$$

प्रश्नावली 1.2

1. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्न परिमेय संख्याओं का निरूपण कीजिए:

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{5}{8}$ (iv) $\frac{3}{16}$

2. मान लीजिए कि संख्या रेखा पर बिंदु O, P और Z क्रमशः पूर्णांकों 0, 3 और –5 को निरूपित करते हैं (आकृति 1.5)। O एवं P के मध्य तीन बिंदु Q, R एवं S इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि OQ = QR = RS = SP हो। बिंदुओं Q, R एवं S से कौन-सी परिमेय संख्याएँ निरूपित होती हैं? अब Z एवं O के मध्य एक बिंदु T इस प्रकार निर्धारित कीजिए कि ZT = TO है। बिंदु T कौन-सी परिमेय संख्या को निरूपित करता है?

–5 0 3
Z T O Q R S P

आकृति 1.5

3. निम्न युग्मों में कौन-सी परिमेय संख्याएँ बराबर हैं?

(i) $\frac{-9}{12}$ एवं $\frac{8}{-12}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ एवं $\frac{20}{-25}$

(iii) $\frac{-7}{21}$ एवं $\frac{3}{9}$ (iv) $\frac{-8}{-14}$ एवं $\frac{13}{21}$

4. निम्न युग्मों में कौन-सी परिमेय संख्या बड़ी है?

(i) $\frac{-4}{11}, \frac{3}{11}$ (ii) $\frac{-5}{8}, \frac{-3}{4}$

(iii) $\frac{-7}{12}, \frac{5}{-8}$ (iv) $\frac{-4}{9}, \frac{-3}{-7}$

5. निम्न युग्मों में छोटी परिमेय संख्या छाँटिए:

(i) $\frac{-4}{7}, \frac{5}{-7}$ (ii) $\frac{6}{13}, \frac{-7}{-13}$

(iii) $\frac{16}{-5}, 3$ (iv) $\frac{4}{-3}, \frac{-8}{7}$

6. निम्न में रिक्त स्थानों पर >, =, < में से उचित संकेत भरिए:

(i) $\frac{-5}{7} \ldots \frac{6}{13}$ (ii) $\frac{-4}{5} \ldots \frac{-5}{6}$

(iii) $\frac{-7}{8} \ldots \frac{21}{-24}$ (iv) $\frac{-9}{-10} \ldots \frac{8}{9}$

7. प्रश्न 4 में दी गई परिमेय संख्याओं के निरपेक्ष मान लिखिए।

8. प्रश्न 5 में दी गई संख्याओं के निरपेक्ष मान लिखिए तथा सत्यापित कीजिए कि संख्या का निरपेक्ष मान संख्या से बड़ा या संख्या के बराबर होता है।

9. रिक्त स्थानों में उचित संकेत >, = या < भरिए:

(i) $\left|\frac{-5}{7}\right| \ldots \left|\frac{6}{13}\right|$ (ii) $\left|\frac{-4}{5}\right| \ldots \left|\frac{-5}{6}\right|$

(iii) $\left|\frac{-7}{8}\right| \ldots \left|\frac{21}{-24}\right|$ (iv) $\left|\frac{-9}{-10}\right| \ldots \left|\frac{8}{9}\right|$

प्राप्त परिणामों की प्रश्न 6 के परिणामों से तुलना कीजिए।

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) परिमेय संख्या $\frac{57}{23}$ संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर स्थित है।

(ii) परिमेय संख्या $\frac{7}{-4}$ संख्या रेखा पर शून्य के दाईं ओर स्थित है।

(iii) परिमेय संख्या $\frac{-8}{-3}$ संख्या रेखा पर शून्य के न तो बाईं ओर है और न ही दाईं ओर।

(iv) परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$ एवं -1 संख्या रेखा पर शून्य के क्रमशः दाईं एवं बाईं ओर स्थित हैं।

(v) यदि $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ है, तो $\left|\frac{p}{q}\right| < \left|\frac{r}{s}\right|$ होगा।

(vi) यदि $|x| = |y|$ है, तो $x = y$ होगा।

(vii) यदि $|x| = 0$ है, तो $x = 0$ होगा।

याद रखने योग्य बातें

1. संख्या $\frac{p}{q}$, जहाँ p एवं q धनात्मक पूर्णांक हैं, भिन्न कहलाती है।
2. संख्या $\frac{p}{q}$, जहाँ p एवं q कोई भी पूर्णांक हैं तथा q शून्येतर है, परिमेय संख्या कहलाती है।
3. परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ सरलतम या लघुतम पदों में कहलाती है, यदि p तथा q का म.स. $= 1$ हो।
4. लघुतम पदों में परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ मानक रूप में कहलाती है, यदि $q > 0$ हो।
5. प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है और प्रत्येक भिन्न भी एक परिमेय संख्या है।
6. यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है और m एक शून्येतर पूर्णांक है, तो

   $\frac{p}{q} = \frac{p \times m}{q \times m}$ होगा।
7. यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है और m, p तथा q का सार्व भाजक है, तो

   $\frac{p}{q} = \frac{p \div m}{q \div m}$ होगा।
8. यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तथा $q, s > 0$, तब $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ होगा, यदि $p \times s > q \times r$ हो।
9. यदि x एवं y दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो या तो (i) $x > y$ या (ii) $x = y$ या फिर (iii) $x < y$ होता है।
10. प्रत्येक परिमेय संख्या, संख्या रेखा पर निरूपित की जा सकती है।
11. प्रत्येक परिमेय संख्या का एक निरपेक्ष मान होता है, जो शून्य या शून्य से बड़ा होता है।
12. संख्या का निरपेक्ष मान स्वयं संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।

परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

अध्याय 2

2.1 भूमिका

कक्षा 6 में, हमने संख्याओं पर विभिन्न संक्रियाओं जैसे-प्राकृत संख्याओं का योग, पूर्ण संख्याओं का घटाना, पूर्णांकों का गुणा एवं भाग, आदि का अध्ययन किया था। वहीं हम इन संक्रियाओं के विभिन्न गुणों का भी अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में, हम इन संक्रियाओं के कार्यक्षेत्र का परिमेय संख्याओं तक विस्तार करेंगे तथा परिमेय संख्याओं के लिए इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन करेंगे। इन गुणों में अधिकांश उसी प्रकार के हैं, जैसे हम पहले पढ़ चुके हैं।

2.2 परिमेय संख्याओं का योग

हम जानते हैं कि यदि x और y प्राकृत संख्याएँ हैं, तो $x+y$ भी एक प्राकृत संख्या होती है। इसी प्रकार, यदि x और y पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $x+y$ भी पूर्ण संख्या होती है। हम यह भी जानते हैं कि दो पूर्णांकों का योग एक पूर्णांक होता है। यहाँ हम दो परिमेय संख्याओं के योग की परिभाषा देंगे और देखेंगे कि यह योग एक परिमेय संख्या होता है।

आइए, मान लें कि x तथा y समान हर वाली दो परिमेय संख्याएँ हैं। यदि $x=\frac{-18}{11}$ एवं $y=\frac{6}{11}$ है, तो x और y का योग एक परिमेय संख्या $\frac{-18+6}{11}$ है, जिसका अंश x तथा y के अंशों -18 एवं 6 का योग है और जिसका हर x एवं y का समान हर 11 है। इस प्रकार,

$$\frac{-18}{11}+\frac{6}{11}=\frac{-18+6}{11}=\frac{-12}{11}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{4}{5}+\frac{13}{5}=\frac{4+13}{5}=\frac{17}{5},$$

$$\frac{6}{23}+\frac{-17}{23}=\frac{6+(-17)}{23}=\frac{-11}{23},$$

$$\frac{-11}{29}+\frac{-25}{29}=\frac{-11+(-25)}{29}=\frac{-36}{29}$$ आदि।

योग का यह नियम इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\boxed{\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}}$$

यदि x एवं y के हर अलग-अलग हैं, तो x एवं y का योग किस प्रकार ज्ञात करेंगे? मान लें कि $x=\frac{8}{7}$ एवं $y=\frac{15}{11}$ है। इस स्थिति में, हम पहले x और y के स्थान पर ऐसी तुल्य परिमेय संख्याएँ लिखेंगे, जिनका हर समान है। यहाँ

$$x=\frac{8}{7}=\frac{8\times11}{7\times11}=\frac{88}{77}$$

$$y=\frac{15}{11}=\frac{15\times7}{11\times7}=\frac{105}{77}$$

इस प्रकार, $$x+y=\frac{8}{7}+\frac{15}{11}=\frac{88}{77}+\frac{105}{77}$$

$$=\frac{88+105}{77}=\frac{193}{77}$$

उदाहरण 1: निम्न परिमेय संख्याओं का योग प्राप्त कीजिए:

(i) $\frac{-2}{5}$ एवं $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{11}{25}$ एवं $\frac{19}{36}$

हल: (i) पहले हम तुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त करेंगे, जिनका समान हर 5 × 8 है।

$$\frac{-2}{5}=\frac{-2\times8}{5\times8}=\frac{-16}{40}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times5}{8\times5}=\frac{15}{40}$$

अतः, $$\frac{-2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{-16}{40}+\frac{15}{40}$$

$$=\frac{-16+15}{40}=\frac{-1}{40}$$

(ii) यहाँ तुल्य संख्याओं का समान हर 25 × 36 होगा।

$$\frac{11}{25}=\frac{11\times36}{25\times36}=\frac{396}{900}$$

$$\frac{19}{36}=\frac{19\times25}{36\times25}=\frac{475}{900}$$

इस प्रकार, $$\frac{11}{25}+\frac{19}{36}=\frac{396}{900}+\frac{475}{900}=\frac{396+475}{900}=\frac{871}{900}$$

व्यापक रूप में, यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{p}{q}=\frac{p\times s}{q\times s} \quad \text{तथा} \quad \frac{r}{s}=\frac{r\times q}{s\times q}$$

और इस प्रकार $$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\times s}{q\times s}+\frac{r\times q}{s\times q}$$

$$=\frac{p\times s+r\times q}{q\times s}$$

अतः, दो परिमेय संख्याओं के योग का नियम है:

$$\boxed{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\times s+r\times q}{q\times s}}$$

उदाहरण 2: योग ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{5}{18}$ एवं $\frac{3}{13}$ का

(ii) $\frac{-4}{11}$ एवं $\frac{5}{14}$ का

हल: (i) $\frac{5}{18}+\frac{3}{13}=\frac{(5\times13)+(3\times18)}{18\times13}$

$$=\frac{65+54}{234}$$

$$=\frac{119}{234}$$

(ii) $\frac{-4}{11}+\frac{5}{14}=\frac{(-4\times14)+(5\times11)}{11\times14}$

$$=\frac{-56+55}{154}$$

$$=\frac{-1}{154}$$

जैसा कि हम पिछले अध्याय में देख चुके हैं, यदि परिमेय संख्याओं के हरों में कुछ समान अपवर्त्य हैं, तो समान हर के लिए दोनों हरों के गुणन के स्थान पर उनका लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) लिया जा सकता है।

उदाहरण 3: योग कीजिए:

(i) $\frac{-9}{10}$ एवं $\frac{22}{15}$

(ii) $\frac{33}{18}$ एवं $\frac{17}{26}$

हल: (i) यहाँ 10 एवं 15 का ल.स. 30 है।

अतः, $\frac{-9}{10}=\frac{-9\times3}{10\times3}=\frac{-27}{30}$

$$\frac{22}{15} = \frac{22 \times 2}{15 \times 2} = \frac{44}{30}$$

इस प्रकार, $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15} = \frac{-27}{30} + \frac{44}{30}$

$$= \frac{-27 + 44}{30} = \frac{17}{30}$$

(ii) यहाँ 18 एवं 26 का ल.स. 234 है।

अतः, $\frac{33}{18} = \frac{33 \times 13}{18 \times 13} = \frac{429}{234}$

$$\frac{17}{26} = \frac{17 \times 9}{26 \times 9} = \frac{153}{234}$$

इस प्रकार, $\frac{33}{18} + \frac{17}{26} = \frac{429}{234} + \frac{153}{234}$

$$= \frac{582}{234}$$

2.3 योग के गुण

हम जानते हैं कि यदि x और y दो प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ अथवा पूर्णांक हैं, तो $x + y = y + x$ होता है।

यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हों, तब भी क्या योग का यह गुण सत्य होता है? कुछ उदाहरण लेकर देखते हैं:

(i) $\frac{-9}{13} + \frac{17}{13} = \frac{-9 + 17}{13} = \frac{8}{13}$

तथा $\frac{17}{13} + \frac{-9}{13} = \frac{17 + (-9)}{13} = \frac{8}{13}$

(ii) $\frac{-9}{5}+\frac{-4}{7}=\frac{-9\times7+(-4)\times5}{5\times7}=\frac{-83}{35}$,

$\frac{-4}{7}+\frac{-9}{5}=\frac{-4\times5+(-9)\times7}{7\times5}=\frac{-83}{35}$

(iii) $\frac{8}{15}+\frac{7}{10}=\frac{8\times2+7\times3}{30}=\frac{37}{30}$,

$\frac{7}{10}+\frac{8}{15}=\frac{7\times3+8\times2}{30}=\frac{37}{30}$

सभी स्थितियों में हम देखते हैं कि $x+y=y+x$ है।

इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

गुण I: *यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो $x+y=y+x$ होगा।*

दो परिमेय संख्याओं का योग किस प्रकार प्राप्त किया जाता है, यह हम जानते हैं। परंतु तीन परिमेय संख्याओं का योग क्या होगा? पूर्णांकों के समान ही हम पहले दो परिमेय संख्याओं का योग प्राप्त करेंगे और इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्या का तीसरी परिमेय संख्या से योग प्राप्त करेंगे। उदाहरणार्थ, $\frac{-5}{4}, \frac{9}{4}$ एवं $\frac{13}{4}$ का योग हम इस प्रकार प्राप्त करेंगे:

$$\frac{-5}{4}+\frac{9}{4}+\frac{13}{4}=\left(\frac{-5}{4}+\frac{9}{4}\right)+\frac{13}{4}$$

$$=\frac{4}{4}+\frac{13}{4}$$

$$=\frac{17}{4}$$

पूर्णांकों के समान ही हम योग इस प्रकार भी प्राप्त कर सकते हैं:

$$\frac{-5}{4}+\left(\frac{9}{4}+\frac{13}{4}\right)=\frac{-5}{4}+\frac{22}{4}=\frac{17}{4}$$

दोनों प्रकार हमें एक ही परिमेय संख्या योग के रूप में प्राप्त होती है।

एक और उदाहरण लेते हैं:

$$\frac{3}{2}+\frac{-5}{3}+\frac{4}{5}=\left(\frac{3}{2}+\frac{-5}{3}\right)+\frac{4}{5}$$

$$=\frac{3\times3+(-5)\times2}{2\times3}+\frac{4}{5}$$

$$=\frac{-1}{6}+\frac{4}{5}$$

$$=\frac{-1\times5+4\times6}{6\times5}$$

$$=\frac{19}{30}$$

तथा $$\frac{3}{2}+\left(\frac{-5}{3}+\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{2}+\frac{-5\times5+4\times3}{3\times5}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{-13}{15}$$

$$=\frac{3\times15+(-13)\times2}{2\times15}$$

$$=\frac{19}{30}$$

उपरोक्त दोनों उदाहरणों से स्पष्ट है कि तीन परिमेय संख्याओं का योग इस बात पर निर्भर नहीं करता कि हम उन्हें किस क्रम में जोड़ रहे हैं। चाहें जिस क्रम में जोड़ें, योग सदैव एक समान ही रहता है। इस प्रकार, पूर्णांकों के समान ही, हमें प्राप्त होता है:

गुण II: *यदि x, y और z तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो*

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

यदि योग के लिए हमारे पास चार परिमेय संख्याएँ x, y, z एवं t हों, तो हम उन्हें अनेक प्रकार से जोड़ सकते हैं। यथा

$$\begin{aligned}(x + y) + (z + t) &= [(x + y) + z] + t\\ &= [x + (y + z)] + t\\ &= x + [y + (z + t)]\\ &= x + [(y + z) + t]\end{aligned}$$

इस प्रकार से प्राप्त समान योग को हम $x + y + z + t$ से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 4: निम्न संख्याओं का योग प्राप्त कीजिए:

(i) $\frac{27}{13}, \frac{25}{13}, \frac{-19}{13}$ एवं $\frac{-21}{13}$

(ii) $\frac{2}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{1}{6}$ एवं $\frac{-8}{15}$

हल: (i) $$\frac{27}{13}+\frac{25}{13}+\frac{-19}{13}+\frac{-21}{13} = \left(\frac{27}{13}+\frac{25}{13}\right)+\left(\frac{-19}{13}+\frac{-21}{13}\right)$$

$$= \frac{52}{13}+\frac{-40}{13}$$

$$= \frac{12}{13}$$

(ii) $$\frac{2}{3}+\frac{-3}{5}+\frac{1}{6}+\frac{-8}{15} = \left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{-8}{15}\right)$$

$$= \frac{2\times5+(-3)\times3}{3\times5}+\frac{1\times5+(-8)\times2}{30}$$

$$= \frac{1}{15}+\frac{-11}{30}$$

$$= \frac{1\times 2+(-11)\times 1}{30}$$

$$= \frac{-9}{30}$$

$$= \frac{-3}{10}$$

गुणों I तथा II का एक निष्कर्ष यह है कि तीन या अधिक परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए हम उन्हें किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं, क्रम बदलने से योग पर कोई अंतर नहीं पड़ेगा। उदाहरण के लिए, उदाहरण 4 को हम निम्न प्रकार से भी हल कर सकते हैं:

(i) $$\frac{27}{13}+\frac{25}{13}+\frac{-19}{13}+\frac{-21}{13} = \left(\frac{27}{13}+\frac{-21}{13}\right)+\left(\frac{25}{13}+\frac{-19}{13}\right)$$

$$= \frac{6}{13}+\frac{6}{13}$$

$$= \frac{12}{13}$$

(ii) $$\frac{2}{3}+\frac{-3}{5}+\frac{1}{6}+\frac{-8}{15} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{-3}{5}+\frac{-8}{15}\right)$$

$$= \left(\frac{2\times 2+1}{6}\right)+\frac{(-3)\times 3+(-8)}{15}$$

$$= \frac{5}{6}+\frac{-17}{15}$$

$$= \frac{5\times 5+(-17)\times 2}{30}$$

$$= \frac{-9}{30}$$

$$= \frac{-3}{10}$$

हम जानते हैं कि पूर्णांक के रूप में शून्य (0) का एक विशेष गुण है। किसी पूर्णांक में शून्य का योग करने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। क्योंकि शून्य एक परिमेय संख्या है, इसलिए आइए देखते हैं एक परिमेय संख्या में इसे जोड़ने पर क्या प्राप्त होता है।

$$0+\frac{7}{9}=\frac{0}{9}+\frac{7}{9}=\frac{0+7}{9}=\frac{7}{9}$$

(याद कीजिए कि परिमेय संख्या के रूप में 0 का तुल्य रूप है $\frac{0}{q}$, जहाँ q कोई भी शून्येतर पूर्णांक हो सकता है।)

इसी प्रकार,

$$\frac{-15}{209}+0=\frac{-15}{209}+\frac{0}{209}=\frac{-15+0}{209}=\frac{-15}{209}$$

$$\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}+\frac{0}{q}=\frac{p+0}{q}=\frac{p}{q}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं:

गुण III: *यदि x एक परिमेय संख्या है, तो*

$$0 + x = x + 0 = x$$

हम जानते हैं कि यदि x एक पूर्णांक है, तो

$$x + (-x) = 0$$

उदाहरणार्थ, $5 + (-5) = 0, - 101 + 101 = 0$

पूर्णांक $-x$ पूर्णांक x का *ऋणात्मक* (*negative*) कहलाता है।

इस प्रकार, −5, 5 का तथा 101, −101 का ऋणात्मक है। इसी प्रकार, परिमेय संख्याओं के लिए भी ऋणात्मक संख्या होती है। यदि $x=\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, तो $\frac{-p}{q}$ एक ऐसी

परिमेय संख्या है जिसके लिए

$$\frac{p}{q}+\left(\frac{-p}{q}\right)=\frac{0}{q}=0$$

सत्य होता है।

दूसरे शब्दों में, $\frac{p}{q}$ का ऋणात्मक $\frac{-p}{q}$ होता है। उदाहरण के लिए, $\frac{-3}{7}$ संख्या $\frac{3}{7}$ का तथा $\frac{9}{11}$ संख्या $\frac{-9}{11}$ का ऋणात्मक है। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं:

गुण IV: *यदि x एक परिमेय संख्या है, तो परिमेय संख्या $-x$ के लिए $x+(-x)=(-x)+x=0$ सत्य है। $-x$ संख्या x का ऋणात्मक होता है।*

गुण IV में दिए गए संबंध से यह निष्कर्ष भी निकलता है कि यदि $-x$, x का ऋणात्मक है, तो x, $-x$ *का ऋणात्मक* है, अर्थात्

$$x=-(-x)$$

उदाहरण 5: परिमेय संख्याओं x एवं y के दिए हुए मानों के लिए, निम्न संबंधों की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $-(-x)=x$, यदि $x=\frac{8}{5}$ और $x=\frac{-5}{7}$

(ii) $-(x+y)=(-x)+(-y)$, यदि $x=\frac{2}{3}$ और $y=\frac{5}{7}$ तथा $x=\frac{-2}{3}$ और $y=\frac{-5}{7}$

हल: (i) $-\left(-\frac{8}{5}\right)=-\left(\frac{-8}{5}\right)=\frac{-(-8)}{5}=\frac{8}{5}$

तथा $-\left(-\left(\frac{-5}{7}\right)\right)=-\left(\frac{-(-5)}{7}\right)=-\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{-5}{7}$

अर्थात् दोनों स्थितियों में, $-(-x)=x$ है।

(ii) $x = \frac{2}{3}$ तथा $y = \frac{5}{7}$ के लिए,

$$-(x+y) = -\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right) = -\left(\frac{14+15}{21}\right) = \frac{-29}{21}$$

इसी प्रकार, $(-x)+(-y) = \frac{-2}{3}+\frac{-5}{7} = \frac{-2\times7+(-5)\times3}{3\times7} = \frac{-29}{21}$

इसी प्रकार, $x = \frac{-2}{3}$ एवं $y = \frac{-5}{7}$ के लिए,

$$-(x+y) = -\left(\frac{-2}{3}+\frac{-5}{7}\right)$$

$$= -\frac{-2\times7+(-5)\times3}{3\times7} = -\frac{-29}{21} = \frac{-(-29)}{21}$$

$$= \frac{29}{21}$$

तथा $(-x)+(-y) = \left[-\left(\frac{-2}{3}\right)\right]+\left[-\left(\frac{-5}{7}\right)\right]$

$$= \frac{-(-2)}{3}+\frac{-(-5)}{7}$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{5}{7}$$

$$= \frac{14+15}{21}$$

$$= \frac{29}{21}$$

इस प्रकार, दोनों ही दशाओं में हमें

$$-(x+y) = (-x)+(-y)$$

प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 2.1

1. योग कीजिए:

(i) $\frac{6}{7}$ एवं $\frac{4}{7}$ (ii) $\frac{7}{13}$ एवं $\frac{-6}{13}$

(iii) $\frac{6}{17}$ एवं $\frac{11}{-17}$ (iv) $\frac{-23}{28}$ एवं $\frac{5}{-28}$

2. सरल कीजिए:

(i) $\frac{-7}{9}+\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-3}{-11}+\frac{5}{9}$

(iii) $\frac{-8}{19}+\frac{-2}{57}$ (iv) $\frac{-7}{26}+\frac{-11}{39}$

3. दोनों पक्षों को अलग-अलग जोड़ कर निम्न समिकाओं की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $\frac{-5}{11}+\frac{-6}{13}=\frac{-6}{13}+\frac{-5}{11}$ (ii) $\frac{-7}{9}+(-4)=-4+\frac{-7}{9}$

(iii) $\frac{-8}{9}+(-7)=-7+\left(\frac{-8}{9}\right)$ (iv) $\frac{4}{11}+\frac{-5}{8}=\frac{-5}{8}+\frac{4}{11}$

4. दोनों पक्षों का अलग-अलग योग कर, निम्न समिकाओं का सत्यापन कीजिए:

(i) $\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{6}+\frac{7}{8}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{-5}{6}\right)+\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{-1}{3}+\left(\frac{4}{9}+\frac{-8}{13}\right)=\left(\frac{-1}{3}+\frac{4}{9}\right)+\frac{-8}{13}$

(iii) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{7}{8}+\frac{-3}{5}\right)=\left(\frac{-2}{3}+\frac{7}{8}\right)+\frac{-3}{5}$ (iv) $\frac{-3}{4}+\left(\frac{2}{5}+\frac{-4}{7}\right)=\left(\frac{-3}{4}+\frac{2}{5}\right)+\frac{-4}{7}$

5. निम्न में से प्रत्येक का सरलीकरण कीजिए:

(i) $\frac{2}{5}+\frac{8}{3}+\frac{-11}{15}+\frac{4}{5}+\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{4}{7}+0+\frac{-8}{9}+\frac{-13}{7}+\frac{17}{21}$

2.4 परिमेय संख्याओं का व्यवकलन (घटाना)

हम जानते हैं कि यदि x और y दो पूर्णांक हैं, तो x से y के व्यवकलन का अर्थ है x में $-y$ का योग, अर्थात्

$$x - y = x + (-y)$$

यहाँ बाईं ओर का (–) चिह्न व्यवकलन संक्रिया के लिए प्रयुक्त हुआ है, तथा दाईं ओर के (–) चिह्न का अर्थ है पूर्णांक का ऋणात्मक होना। दो परिमेय संख्याओं के व्यवकलन (घटाने) को भी हम इसी प्रकार परिभाषित करते हैं। विशिष्ट रूप से, यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\boxed{\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right)}$$

इस प्रकार,

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{6}{11} - \left(\frac{-8}{7}\right) = \frac{6}{11} + \left[-\left(\frac{-8}{7}\right)\right]$$

$$\frac{-13}{15} - \frac{19}{27} = \frac{-13}{15} + \left(-\frac{19}{27}\right)$$

$$\frac{-8}{21} - \left(\frac{-15}{19}\right) = \frac{-8}{21} + \left[-\left(\frac{-15}{21}\right)\right]$$

यहाँ दाईं ओर के व्यंजकों को सरल करके हम उन्हें एक परिमेय संख्या के रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरण 6: व्यवकलन कीजिए:

(i) $\frac{1}{5}$ का $\frac{2}{3}$ से (ii) $\frac{-8}{7}$ का $\frac{6}{11}$ से

(iii) $\frac{19}{27}$ का $\frac{-13}{15}$ से (iv) $\frac{-15}{19}$ का $\frac{-8}{21}$ से

(i) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{3}+\left(\frac{-1}{5}\right)$

$$=\frac{2\times5+(-1)\times3}{3\times5}$$

$$=\frac{7}{15}$$

(ii) $\frac{6}{11}-\left(\frac{-8}{7}\right)=\frac{6}{11}+\left[-\left(\frac{-8}{7}\right)\right]$

$$=\frac{6}{11}+\frac{8}{7}$$

$$=\frac{6\times7+8\times11}{11\times7}$$

$$=\frac{130}{77}$$

(iii) $\frac{-13}{15}-\frac{19}{27}=\frac{-13}{15}+\frac{(-19)}{27}$

$$=\frac{-13\times9+(-19)\times5}{135}$$

$$=\frac{-212}{135}$$

(iv) $\frac{-8}{21}-\left(\frac{-15}{19}\right)=\frac{-8}{21}+\left[-\left(\frac{-15}{19}\right)\right]$

$$=\frac{-8}{21}+\frac{15}{19}$$

$$=\frac{-8\times19+15\times21}{21\times19}$$

$$=\frac{163}{399}$$

उदाहरण 7: (i) $\frac{19}{27}$ में किस संख्या को जोड़ने पर $\frac{-13}{15}$ प्राप्त होगा ?

(ii) $\frac{-15}{19}$ में क्या जोड़ें कि योग $\frac{-8}{21}$ हो जाए ?

हल: इनका हल हम दो अलग-अलग प्रकार से करेंगे।

(i) मान लें कि $\frac{19}{27}$ में $\frac{p}{q}$ जोड़ने पर $\frac{-13}{15}$ प्राप्त होता है। तब

$$\frac{19}{27}+\frac{p}{q}=\frac{-13}{15}$$

दोनों ओर $\frac{-19}{27}$ जोड़ने पर प्राप्त होगा:

$$\frac{19}{27}+\frac{p}{q}+\frac{-19}{27}=\frac{-13}{15}+\left(\frac{-19}{27}\right)$$

अर्थात्

$$\frac{p}{q}=\frac{-13}{15}+\frac{-19}{27}$$

$$=\frac{-13\times 9+(-19)\times 5}{135}$$

$$=\frac{-212}{135}$$

(ii) यहाँ अभीष्ट संख्या है: $\frac{-8}{21}-\frac{(-15)}{19}=\frac{-8}{21}+\left[-\left(\frac{-15}{19}\right)\right]$

$$=\frac{-8}{21}+\frac{15}{19}$$

$$=\frac{-8\times 19+15\times 21}{21\times 19}$$

$$= \frac{-152+315}{399}$$

$$= \frac{163}{399}$$

हम जानते हैं कि यदि x और $y\,(x \neq y)$ दो पूर्णांक हैं, तो $x - y \neq y - x$ होता है। परिमेय संख्याओं के व्यवकलन (घटाने) के लिए भी यह कथन सत्य है।

उदाहरण के लिए,

यदि $x = \frac{3}{5}$ और $y = \frac{7}{9}$ है, तो

$$x - y = \frac{3}{5} - \frac{7}{9} = \frac{3\times9 - 7\times5}{5\times9} = \frac{-8}{45} = -\frac{8}{45}$$

तथा
$$y - x = \frac{7}{9} - \frac{3}{5} = \frac{7\times5 - 3\times9}{9\times5} = \frac{8}{45}$$

पुनः पूर्णांकों x, y और z के लिए, हम जानते हैं कि $(x + y) + z = x + (y + z)$ होता है। परंतु संबंध $(x - y) - z = x - (y - z)$ केवल $z = 0$ होने पर ही सत्य होता है। परिमेय संख्याओं के व्यवकलन के लिए भी यही स्थिति है। उदाहरण के लिए,

यदि $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ और $z = \frac{1}{7}$ है, तो

$$(x - y) - z = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42},$$

परंतु
$$x - (y - z) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{21} = \frac{13}{42}\text{।}$$

परिमेय संख्या के रूप में, योग के लिए 0 का गुण है:

$$x + 0 = x \text{ तथा } 0 + x = x$$

परंतु व्यवकलन के लिए,

$x - 0 = x$ तो सभी परिमेय संख्या के लिए सत्य है, किंतु $0 - x = x$ किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए सत्य नहीं है।

2.5 सरलीकरण के लिए एक कार्यकारी नियम

मान लें कि हमें व्यंजक

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\left(\frac{-2}{5}\right)+\frac{7}{8}-\frac{3}{2}+\frac{4}{5}$$

को सरल करके एक परिमेय संख्या के रूप में लिखना है। वैसे तो एक बार में दो संख्याएँ लेकर इस व्यंजक को सरल किया जा सकता है, परंतु इसे निम्न चरणों में भी सरल किया जा सकता है:

चरण I: व्यंजक की सभी संख्याओं के हरों का ल.स. प्राप्त करते हैं (हमारे उदाहरण में यह ल.स. 40 है)। यह संख्या सरलीकरण के उपरांत प्राप्त होने वाली संख्या का हर है (जिसका लघुतम पदों में होना आवश्यक नहीं है)।

चरण II: सरलीकृत संख्या का अंश हम निम्न चरणों में प्राप्त करते हैं:

(i) प्रथम संख्या के हर से ल.स. को विभाजित कर भागफल प्राप्त करते हैं (हमारे उदाहरण में यह भागफल 5 है)।

(ii) प्रथम संख्या के अंश को (i) में प्राप्त भागफल से गुणा कर एक पूर्णांक प्राप्त करते हैं (हमारे उदाहरण में यह पूर्णांक 15 है)।

(iii) व्यंजक की सभी संख्याओं के लिए चरण II (i) एवं (ii) को दोहराते हैं (हमारे उदाहरण में इस प्रकार प्राप्त होने वाले पूर्णांक क्रमश: 20, −16, 35, 60 और 32 हैं)।

(iv) इस प्रकार प्राप्त पूर्णांकों के मध्य वही चिह्न लगाते हैं, जो मूल व्यंजक में संगत परिमेय संख्याओं के मध्य लगे हैं (हमारे उदाहरण में इस प्रकार प्राप्त व्यंजक है: $15 + 20 + (-16) + 35 - 60 + 32$)।

(v) चरण II (iv) में प्राप्त व्यंजक से प्राप्त पूर्णांक ही सरलीकृत परिमेय संख्या का अंश है (हमारे उदाहरण में प्राप्त अंश 26 है)।

चरण III: प्राप्त संख्या को लघुतम रूप में लिखते हैं।

उपरोक्त चरणों में सरल करने पर, हमें परिमेय संख्या $\frac{13}{20}$ प्राप्त होती है।

एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$\frac{2}{5}+\frac{8}{3}-\frac{12}{15}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$$

वांछित हर = 5, 3, 15, 5, 3 का लघुतम समापवर्त्य = 15 (चरण 1)

$\frac{2}{5}$: $15 \div 5 = 3$ [चरण II (i)]

$2 \times 3 = \boxed{6}$ [चरण II (ii)]

$\frac{8}{3}$: $15 \div 3 = 5$

$8 \times 5 = \boxed{40}$ [चरण II (iii)]

$\frac{12}{15}$: $15 \div 15 = 1$

$12 \times 1 = \boxed{12}$ [चरण II (iii)]

$\frac{4}{5}$: $15 \div 5 = 3$

$4 \times 3 = \boxed{12}$ [चरण II (iii)]

$\frac{2}{3}$: $15 \div 3 = 5$

$2 \times 5 = \boxed{10}$ [चरण II (iii)]

$\therefore$ वांछित अंश $= 6 + 40 - 12 + 12 - 10$

$= 58 - 22$

$= 36$

अत:, वांछित परिमेय संख्या $= \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$ (चरण III)

उपर्युक्त प्रक्रिया को हम संक्षेप में निम्न प्रकार लिखते हैं:

$$\frac{2}{5}+\frac{8}{3}-\frac{12}{15}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$$

$$= \frac{(2\times3)+(8\times5)-(12\times1)+(4\times3)-(2\times5)}{15}$$

$$= \frac{6+40-12+12-10}{15}$$

$$= \frac{58-22}{15}$$

$$= \frac{36}{15}$$

$$= \frac{12}{5}$$

प्रश्नावली 2.2

1. अंतर ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{13}{15}-\frac{12}{25}$ (ii) $\frac{7}{24}-\frac{19}{36}$

(iii) $\frac{5}{63}-\frac{-8}{21}$ (iv) $\frac{-6}{13}-\frac{-7}{15}$

2. निम्न में से प्रत्येक में पहली संख्या को दूसरी में से तथा दूसरी संख्या को पहली संख्या में से घटाइए। जाँचिए कि क्या दोनों बार एक ही उत्तर प्राप्त होता है।

(i) $\frac{7}{8}, \frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{4}, \frac{-1}{8}$ (iii) $\frac{8}{33}, \frac{5}{22}$

3. दो परिमेय संख्याओं का योग – 8 है। यदि एक संख्या $\frac{-15}{7}$ है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

4. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{1}{2}$ है। यदि एक संख्या $\frac{-8}{19}$ है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

5. संख्या $\frac{-7}{8}$ में क्या जोड़ें कि योग $\frac{5}{9}$ प्राप्त हो जाए?

6. संख्या $\frac{26}{33}$ में से क्या घटाएँ कि $\frac{-5}{11}$ प्राप्त हो?

7. प्रत्येक युग्म में परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि **क्या** वे बराबर हैं:

(i) $\left(\frac{-8}{9}-\frac{11}{4}\right)-\frac{-4}{12}, \frac{-8}{9}-\left(\frac{11}{4}-\frac{-4}{12}\right)$

(ii) $\left(\frac{5}{14}-\frac{-7}{9}\right)-\frac{3}{42}, \frac{5}{14}-\left(\frac{-7}{9}-\frac{3}{42}\right)$

8. सरल कीजिए:

(i) $\frac{-2}{3}+\frac{5}{9}-\frac{-7}{6}$

(ii) $\frac{3}{8}-\frac{-2}{9}+\frac{-1}{36}$

(iii) $\frac{1}{6}+\frac{-2}{5}-\frac{-2}{15}$

(iv) $\frac{1}{12}+\frac{-5}{18}-\frac{7}{24}$

9. रिक्त स्थान भरिए:

(i) $\frac{-4}{13}-\frac{-3}{26}=....$

(ii) $\frac{-5}{14}+....=-1$

(iii) $\frac{-7}{9}+....=3$

(iv) $....+\frac{15}{23}=4$

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $-4<\frac{-12}{5}-\frac{9}{5}$

(ii) $\frac{-3}{4}-\frac{-7}{5}>\frac{1}{5}$

(iii) ऋणात्मक परिमेय संख्या का ऋणात्मक एक धनात्मक संख्या होती है।

(iv) यदि x एवं y दो परिमेय संख्याएँ हैं, जहाँ $x>y$, तो $x-y$ सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या होगी।

2.6 परिमेय संख्याओं का गुणन

दो परिमेय संख्याओं का गुणन दो भिन्नों के गुणन के समान ही होता है। यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

इस प्रकार, दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या होती है, जिसका अंश दोनों परिमेय संख्याओं के अंशों का गुणनफल तथा हर दोनों परिमेय संख्याओं के हरों का गुणनफल होता है।

उदाहरण 9: निम्न का गुणनफल प्राप्त कीजिए:

(i) $\frac{3}{8}$ और $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{-2}{11}$ और $\frac{6}{5}$ (iii) $\frac{-3}{19}$ और $\frac{-5}{13}$

हल: (i) $\frac{3}{8} \times \frac{-5}{7} = \frac{3 \times (-5)}{8 \times 7}$

$$= \frac{-15}{56}$$

(ii) $\frac{-2}{11} \times \frac{6}{5} = \frac{(-2) \times 6}{11 \times 5}$

$$= \frac{-12}{55}$$

(iii) $\frac{-3}{19} \times \frac{-5}{13} = \frac{(-3) \times (-5)}{19 \times 13}$

$$= \frac{15}{247}$$

2.7 गुणन के गुण

हम पूर्णांकों के गुणन के कुछ गुणों का अध्ययन कर चुके हैं। परिमेय संख्याओं के गुणन के गुण भी इन गुणों के समान ही हैं। उदाहरण के लिए, यदि x और y दो पूर्णांक हैं, तो हम जानते हैं कि

$$x \times y = y \times x$$

यदि x और y परिमेय संख्याएँ हैं, तो क्या होगा ? कुछ उदाहरण लेते हैं:

यदि $x = \frac{35}{9}$ और $y = \frac{7}{82}$ है, तो

$$x \times y = \frac{35}{9} \times \frac{7}{82} = \frac{35 \times 7}{9 \times 82} = \frac{245}{738}$$

तथा $$y \times x = \frac{7}{82} \times \frac{35}{9} = \frac{7 \times 35}{82 \times 9} = \frac{245}{738}$$

इस प्रकार, $$\frac{35}{9} \times \frac{7}{82} = \frac{7}{82} \times \frac{35}{9},$$

अर्थात् $$x \times y = y \times x$$

इसी प्रकार, $$\frac{21}{16} \times \frac{-11}{5} = \frac{21 \times (-11)}{16 \times 5} = \frac{-231}{80}$$

तथा $$\frac{-11}{5} \times \frac{21}{16} = \frac{(-11) \times 21}{5 \times 16} = \frac{-231}{80}$$

अतः यहाँ भी $$\frac{21}{16} \times \frac{-11}{5} = \frac{-11}{5} \times \frac{21}{16}$$

व्यापक रूप में, यदि $x = \frac{p}{q}$ तथा $y = \frac{r}{s}$ है, तो

$$x \times y = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s},$$

तथा $$y \times x = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q} = \frac{r \times p}{s \times q}$$

परंतु पूर्णांकों के गुणन के गुणों से हम जानते हैं कि

$$p \times r = r \times p \text{ तथा } q \times s = s \times q$$

इस प्रकार, $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q}$

अतः, $x \times y = y \times x$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं:

गुण 1: *यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो $x \times y = y \times x$ होगा।*

यदि x, y और z तीन पूर्णांक हैं, तो हम जानते हैं कि

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

आइए, देखें कि क्या यह गुण परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है या नहीं। उदाहरणार्थ, यदि $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{-2}{11}$ एवं $z = \frac{5}{7}$ है, तो

$$(x \times y) \times z = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-2}{11}\right) \times \frac{5}{7} = \left(\frac{-3 \times (-2)}{4 \times 11}\right) \times \frac{5}{7}$$

$$= \frac{6}{44} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{308}$$

$$= \frac{15}{154}$$

तथा $$x \times (y \times z) = \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{11} \times \frac{5}{7}\right) = \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2 \times 5}{11 \times 7}\right)$$

$$= \frac{-3}{4} \times \frac{-10}{77} = \frac{30}{308}$$

$$= \frac{15}{154}$$

इस प्रकार, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{4}{9}\times\frac{-13}{3}\right)\times\frac{15}{7}=\frac{4\times(-13)}{9\times3}\times\frac{15}{7}$$

$$=\frac{-52}{27}\times\frac{15}{7}$$

$$=\frac{-780}{189}=\frac{-260}{63}$$

तथा $\frac{4}{9}\times\left(\frac{-13}{3}\times\frac{15}{7}\right)=\frac{4}{9}\times\left(\frac{-195}{21}\right)$

$$=\frac{-780}{189}=\frac{-260}{63}$$

ये सभी गुणन के निम्न गुण के अनुरूप हैं:

गुण II: *यदि x, y एवं z तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो*

$$(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$$

इस गुण के कारण हम तीन या अधिक परिमेय संख्याओं को कोष्ठकों को देखे बिना गुणा कर सकते हैं। समुचित उदाहरणों द्वारा हम देख सकते हैं कि यदि x, y, z एवं t चार परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$(x\times y)\times(z\times t)=[x\times(y\times z)]\times t=[(x\times y)\times z]\times t$$
$$=x\times[(y\times z)\times t]=x\times[y\times(z\times t)]$$

ये सभी $x\times y\times z\times t$ के रूप में लिखे जा सकते हैं।

हम जानते हैं कि 0 तथा 1 विशेष प्रकार के पूर्णांक हैं। 0 से गुणा करने पर कोई भी पूर्णांक 0 हो जाता है, जबकि 1 से गुणा करने पर पूर्णांक में कोई परिवर्तन नहीं होता। 0 तथा 1 परिमेय संख्याओं के साथ भी इसी तरह का गुण रखते हैं।

गुण III: *यदि x एक परिमेय संख्या है, तो*

$$x\times0=0\times x=0$$

स्पष्टीकरण के तौर पर,

$$\frac{73}{82}\times 0 = \frac{73}{82}\times\frac{0}{1}$$

$$= \frac{73\times 0}{82\times 1}$$

$$= \frac{0}{82}$$

$$= 0$$

$$0\times\frac{-105}{279} = \frac{0}{1}\times\frac{-105}{279}$$

$$= \frac{0\times(-105)}{1\times 279}$$

$$= \frac{0}{279}$$

$$= 0$$

गुण IV: *यदि x एक परिमेय संख्या है, तो*

$$x\times 1 = 1\times x = x$$

उदाहरणार्थ,

$$\frac{386}{273}\times 1 = \frac{386}{273}\times\frac{1}{1}$$

$$= \frac{386\times 1}{273\times 1} = \frac{386}{273}$$

$$1\times\frac{-983}{1010} = \frac{1}{1}\times\frac{-983}{1010}$$

$$= \frac{1\times(-983)}{1\times(1010)} = \frac{-983}{1010}$$

पूर्णांकों के गुणन का एक महत्त्वपूर्ण गुण है जिसके अनुसार,

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z,$$

अर्थात् पहले जोड़ कर गुणा करने से वही प्राप्त होता है जो पहले गुणा कर फिर जोड़ने से प्राप्त होता है। इसी प्रकार,

$$x \times (y - z) = x \times y - x \times z$$

परिमेय संख्याओं के लिए भी ये गुण हमें प्राप्त हैं।

गुण V: यदि x, y और z परिमेय संख्याएँ हैं, तो

(i) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

(ii) $x \times (y - z) = x \times y - x \times z$

उदाहरण 10: (i) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{9}{5}+\frac{6}{7}\right)$ तथा (ii) $\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$

प्राप्त कीजिए और जाँचिए कि ये संख्याएँ बराबर हैं।

हल: (i) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{9}{5}+\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{9\times7+6\times5}{5\times7}\right)$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{63+30}{35} = \frac{2}{3}\times\frac{93}{35}$$

$$= \frac{186}{105} = \frac{62}{35}$$

(ii) $\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7} = \frac{2\times9}{3\times5}+\frac{2\times6}{3\times7}$

$$= \frac{18}{15}+\frac{12}{21}$$

$$= \frac{126+60}{105}$$

$$= \frac{186}{105}$$

$$= \frac{62}{35}$$

इस प्रकार, दोनों परिमेय संख्याएँ बराबर हैं।

उदाहरण 11: निम्न परिमेय संख्याओं को सरल कीजिए और जाँचिए कि क्या ये बराबर हैं।

(i) $\frac{7}{12}\times\left(\frac{28}{13}-\frac{5}{11}\right)$ (ii) $\frac{7}{12}\times\frac{28}{13}-\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}$

हल: (i) $\frac{7}{12}\times\left(\frac{28}{13}-\frac{5}{11}\right)$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{28\times11-5\times13}{13\times11}$$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{308-65}{143}$$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{243}{143}$$

$$=\frac{1701}{1716}$$

$$=\frac{567}{572}$$

(ii) $\frac{7}{12}\times\frac{28}{13}-\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}$

$$=\frac{196}{156}-\frac{35}{132}$$

$$=\frac{196\times11-35\times13}{1716}$$

$$=\frac{2156-455}{1716}$$

$$=\frac{1701}{1716}$$

$$=\frac{567}{572}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि दोनों परिमेय संख्याएँ बराबर हैं।

प्रश्नावली 2.3

1. गुणा कीजिए:

(i) $\frac{3}{11}$ को $\frac{2}{5}$ से (ii) $\frac{3}{7}$ को $\left(\frac{-2}{5}\right)$ से

(iii) $\left(\frac{-2}{9}\right)$ को $\frac{33}{54}$ से (iv) $\left(\frac{-3}{7}\right)$ को $\frac{7}{5}$ से

(v) $\left(\frac{-5}{17}\right)$ को $\frac{3}{10}$ से (vi) $\frac{6}{7}$ को $\left(\frac{-17}{18}\right)$ से

(vii) $\left(\frac{5}{-13}\right)$ को $\left(\frac{-26}{15}\right)$ से (viii) $\left(\frac{-6}{11}\right)$ को $\frac{44}{13}$ से

(ix) $\left(\frac{9}{-11}\right)$ को $\frac{22}{-27}$ से (x) $\left(\frac{-8}{25}\right)$ को $\left(\frac{-5}{16}\right)$ से

2. निम्न व्यंजकों को सरल कर मानक परिमेय संख्या के रूप में लिखिए:

(i) $\frac{-8}{7}\times\frac{14}{5}$ (ii) $\frac{7}{3}\times\frac{-1}{28}$

(iii) $\frac{-14}{9}\times(-27)$ (iv) $\frac{13}{6}\times\frac{-18}{91}$

3. गुण $x\times y=y\times x$ का सत्यापन कीजिए, जहाँ

(i) $x=\frac{-1}{5},\ y=\frac{2}{7}$ (ii) $x=\frac{2}{7},\ y=\frac{-11}{8}$

(iii) $x=0,\ y=\frac{-15}{4}$ (iv) $x=1,\ y=\frac{-7}{2}$

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए;

(i) $\frac{-5}{13}\times\frac{-6}{11}=\frac{-6}{11}\times\frac{-5}{13}$ (एक उदाहरण)

(ii) $-4\times\frac{5}{9}=$...............

(iii) $\frac{3}{11}\times\frac{-5}{8}=$..............

(iv) $-6\times\frac{-3}{-7}=$.............

5. निम्न मानों के साथ गुण $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$ का सत्यापन कीजिए;

(i) $x=\frac{7}{4},\ y=\frac{-11}{3},\ z=\frac{1}{2}$

(ii) $x=0,\ y=\frac{-12}{5},\ z=\frac{2}{5}$

(iii) $x=1,\ y=\frac{-5}{2},\ z=\frac{2}{5}$

(iv) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{4}{3},\ z=\frac{-7}{5}$

6. रिक्त स्थान भरिए:

(i) $\left(\frac{-3}{4}\right)\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{-7}{8}\right)=\left(\frac{-3}{4}\times\frac{4}{5}\right)\times\frac{-7}{8}$ (एक उदाहरण)

(ii) $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{-5}{13}\right)=$ ....

(iii) $-4\times\left(-6\times\frac{-7}{11}\right)=$ ....

(iv) $\frac{-2}{9}\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}\right)=$ ....

7. दिए हुए मान लेकर गुण $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ को सत्यापित कीजिए:

(i) $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{5}{2}, z = \frac{7}{6}$ (ii) $x = -2, y = \frac{9}{5}, z = \frac{2}{3}$

(iii) $x = \frac{-5}{2}, y = \frac{16}{3}, z = -1$ (iv) $x = 0, y = \frac{-8}{3}, z = 1$

8. प्रश्न 7 में दिए गए x, y, z के मान लेकर, गुण

$$x \times (y - z) = x \times y - x \times z$$

का सत्यापन कीजिए।

9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) $\frac{-4}{5} \times \left(\frac{5}{7} + \frac{-8}{9}\right) = \left(\frac{-4}{5} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{-4}{5} \times \frac{-8}{9}\right)$ (एक उदाहरण)

(ii) $\frac{-3}{8} \times \left(\frac{-6}{11} + \frac{4}{9}\right) =$ ....

(iii) $6 \times \left(\frac{5}{13} + \frac{-3}{4}\right) =$ ....

(iv) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-5}{7} - \frac{4}{5}\right) =$ ....

(v) $\frac{-4}{7} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{-2}{3}\right) =$ ....

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $-1 \times x$ धनात्मक है, यदि x ऋणात्मक है।

(ii) $-1 \times (0 - x)$ ऋणात्मक है, यदि x धनात्मक है।

(iii) $-x \times y$ धनात्मक है, यदि y ऋणात्मक है।

(iv) $x \times (y + z)$ शून्येतर है, यदि x शून्येतर है।

(v) यदि $x \times (y - z)$ शून्य है, तो $y = z$ होगा।

(vi) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल कभी पूर्णांक नहीं होगा।

(vii) दो पूर्णांकों का गुणनफल कभी भिन्न नहीं होगा।

(viii) परिमेय संख्या x के लिए, $x \times y = y + y + ... x$ बार होता है।

2.8 किसी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम

आइए, एक परिमेय संख्या $\frac{3}{7}$ पर विचार करें, जो दो पूर्णांकों 3 (अंश) एवं 7 (हर) से मिलकर बनी है। इस संख्या के अंश एवं हर की अदला-बदली करने पर एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{7}{3}$ प्राप्त होती है। इस प्रकार, यदि $\frac{p}{q}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $\frac{q}{p}$ एक दूसरी परिमेय संख्या है। यह संख्या $\frac{p}{q}$ का *व्युत्क्रम* (*reciprocal*) कहलाती है। इस प्रकार, $\frac{7}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{3}{7}$ का व्युत्क्रम है। इसी प्रकार, $\frac{9}{-13}$ या $\frac{-9}{13}$ संख्या $\frac{-13}{9}$ का व्युत्क्रम है तथा $\frac{-105}{113}$ संख्या $\frac{113}{-105}$ या $\frac{-113}{105}$ का व्युत्क्रम है।

हम यहाँ देख सकते हैं कि यदि $\frac{q}{p}$ संख्या $\frac{p}{q}$ का व्युत्क्रम है, तो $\frac{p}{q}$ संख्या $\frac{q}{p}$ का व्युत्क्रम है। दूसरे शब्दों में, $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{q}{p}$ एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं। यदि हम $\frac{p}{q}$ को x से दर्शाते हैं, तो इसके व्युत्क्रम $\frac{q}{p}$ को दर्शाने के लिए x^{-1} का प्रयोग करते हैं। अर्थात् हम लिखेंगे:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$$

यहाँ से हम दो तथ्य देख पाते हैं:

1. $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$

दोनों ओर का व्युत्क्रम लेने पर,

$$\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \qquad \left(\because \frac{q}{p} \text{ का व्युत्क्रम } \frac{p}{q} \text{ है}\right)$$

$\frac{p}{q} = x$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

इस प्रकार, किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए,

$$(x^{-1})^{-1} = x \text{ है।}$$

अर्थात् *किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या के व्युत्क्रम का व्युत्क्रम वह संख्या ही होती है।*

2. $\left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \times \frac{q}{p}$

$$= \frac{p \times q}{q \times p}$$

$$= 1$$

इस प्रकार, किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए

$$x \times x^{-1} = 1 \text{ है।}$$

अर्थात् *किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या एवं उसके व्युत्क्रम का गुणनफल सदैव* 1 *होता है।*

इस संबंध के कारण हम व्युत्क्रम x^{-1} को $\frac{1}{x}$ से भी दर्शाते हैं।

ध्यान दीजिए कि परिमेय संख्या के रूप में 0 का कोई व्युत्क्रम नहीं होता, क्योंकि $0 = \frac{0}{1}$ है तथा $0^{-1} = \frac{1}{0}$ है और यह परिमेय संख्या नहीं है।

उदाहरण 12: निम्न परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{7} + \frac{5}{11}$ (ii) $\frac{3}{7} - \frac{5}{11}$ (iii) $\frac{3}{7} \times \frac{5}{11}$

(iv) $\left|\frac{-3}{7}\right|$ (v) $-\left|\frac{5}{11}\right|$

हल: (i) $\frac{3}{7}+\frac{5}{11}=\frac{3\times11+5\times7}{7\times11}$

$=\frac{33+35}{77}$

$=\frac{68}{77}$

अत:, $\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{68}{77}\right)^{-1}$

$=\frac{77}{68}$

(ii) $\frac{3}{7}-\frac{5}{11}=\frac{3\times11-5\times7}{7\times11}$

$=\frac{33-35}{77}$

$=\frac{-2}{77}$

अत:, $\left(\frac{3}{7}-\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{-2}{77}\right)^{-1}=\frac{-77}{2}$

(iii) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}=\frac{3\times5}{7\times11}$

$=\frac{15}{77}$

अत:, $\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{15}{77}\right)^{-1}=\frac{77}{15}$

(iv) $\left|\frac{-3}{7}\right|^{-1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{3}$

(v) $\left(-\left|\frac{5}{11}\right|\right)^{-1} = \left(\frac{-5}{11}\right)^{-1} = \frac{-11}{5}$

उदाहरण 13: यदि x एवं y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं, तो निम्न कथनों को सत्य या असत्य लिखिए:

1. $(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$
2. $(x - y)^{-1} = x^{-1} - y^{-1}$
3. $(x \times y)^{-1} = x^{-1} \times y^{-1}$
4. $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

हल:

1. हम $x = \frac{3}{7}$ तथा $y = \frac{5}{11}$ लेने पर देखते हैं कि

$$(x + y)^{-1} = \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{11}\right)^{-1} = \left(\frac{33+35}{77}\right)^{-1} = \left(\frac{68}{77}\right)^{-1} = \frac{77}{68}, \text{ परंतु}$$

$$x^{-1} + y^{-1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{11}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{3}\right) + \left(\frac{11}{5}\right) = \frac{35+33}{15} = \frac{68}{15} \text{ है।}$$

इस प्रकार, कथन 1 असत्य है।

2. इसी प्रकार,

$$\left(\frac{3}{7} - \frac{5}{11}\right)^{-1} = \left(\frac{33-35}{77}\right)^{-1} = \frac{-77}{2}, \text{ परंतु}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{11}\right)^{-1} = \frac{7}{3} - \frac{11}{5} = \frac{2}{15} \text{ है।}$$

इस प्रकार, कथन 2 भी असत्य है।

3. $\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{15}{77}\right)^{-1}=\frac{77}{15}$,

तथा $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\times\left(\frac{5}{11}\right)^{-1}=\frac{7}{3}\times\frac{11}{5}=\frac{77}{15}$

इस प्रकार, x और y के इन मानों के लिए कथन 3 सत्य है। x और y के अन्य मान लेकर भी हम देख सकते हैं कि यह कथन सत्य है। वास्तव में, यदि $x=\frac{p}{q}$ तथा $y=\frac{r}{s}$ दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$(x\times y)^{-1}=\left(\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}\right)^{-1}=\left(\frac{p\times r}{q\times s}\right)^{-1}=\frac{q\times s}{p\times r},$$

तथा $x^{-1}\times y^{-1}=\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\times\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}=\frac{q}{p}\times\frac{s}{r}=\frac{q\times s}{p\times r}$

इस प्रकार, कथन 3 सदैव सत्य है।

4. यदि $x=\frac{p}{q}$ है, तो

$$|x^{-1}|=\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\right|=\left|\frac{q}{p}\right|=\frac{|q|}{|p|},$$

तथा $|x|^{-1}=\left|\frac{p}{q}\right|^{-1}=\left(\frac{|p|}{|q|}\right)^{-1}=\frac{|q|}{|p|}$

इस प्रकार, शून्येतर संख्या x के लिए, कथन 4 भी सत्य है।

2.9 परिमेय संख्याओं का विभाजन

आइए, दो परिमेय संख्याओं x एवं y, जहाँ $y \neq 0$ है, पर विचार करें। हम x को y से विभाजित करना चाहते हैं। दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या होता है। अतः इस बात की अपेक्षा करना स्वाभाविक ही है कि दो परिमेय संख्याओं के विभाजन से भी परिमेय संख्या ही प्राप्त होगी। वास्तव में यह सच भी है।

मान लीजिए $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं। गुणनफल के समान ही, हम अंशों एवं हरों को अलग-अलग विभाजित करते हैं। अर्थात् हम लिखते हैं:

$$\boxed{\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p \div r}{q \div s}}$$

यदि $p \div r$ एवं $q \div s$ से हमें पूर्णांक प्राप्त होते हैं, तो उपर्युक्त संक्रिया से हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए,

$$\frac{8}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{8 \div 2}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{81}{605} \div \frac{27}{11} = \frac{81 \div 27}{605 \div 11} = \frac{3}{55}$$

परंतु यदि $p \div r$ एवं $q \div s$ में से एक या दोनों पूर्णांक नहीं हैं, अर्थात् परिमेय संख्याएँ हैं, तो उपर्युक्त संक्रिया से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{\text{परिमेय संख्या}}{\text{परिमेय संख्या}}$$

और इस प्रकार, हम उसी समस्या पर लौट आए, जिसमें एक परिमेय संख्या को दूसरी परिमेय संख्या से विभाजित करना है। इसलिए परिमेय संख्याओं के विभाजन को हम एक दूसरे दृष्टिकोण से देखेंगे और इसके लिए परिमेय संख्या के व्युत्क्रम का प्रयोग करेंगे।

यदि 8 एवं 2 दो पूर्णांक लें, तो

$$8 \div 2 = 4$$

परिमेय संख्याओं के रूप में हम इसे लिखेंगे:

$$\frac{8}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$$

हम जानते हैं कि

$$\frac{8}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{8 \times 1}{1 \times 2} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}$$

व्युत्क्रम का प्रयोग कर, हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{8}{1} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-1} = \frac{4}{1}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

$$\frac{8}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{8}{1} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-1}$$

$\frac{8}{1}$ को x तथा $\frac{2}{1}$ को y लिखने पर, हम कह सकते हैं कि

$$x \div y = x \times y^{-1}$$

यही वह संबंध है जिसके द्वारा हम परिमेय संख्याओं का विभाजन परिभाषित करते हैं।

यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हैं एवं $y \neq 0$ है, तो

$$\boxed{x \div y = x \times y^{-1}}$$

शब्दों में कहें, तो x *को* $y\,(\neq 0)$ *से विभाजित करने का अर्थ है* x *को* y *के व्युत्क्रम से गुणा करना।*

इस प्रकार,

$$8 \div \frac{5}{6} = \frac{8}{1} \times \frac{6}{5}$$

$$\frac{7}{3} \div \frac{11}{23} = \frac{7}{3} \times \frac{23}{11}$$

$$\frac{-5}{9} \div \frac{-8}{29} = \frac{-5}{9} \times \frac{-29}{8}$$ आदि।

व्युत्क्रम के गुणों का प्रयोग कर, हम देख सकते हैं कि गुणन के अनेक गुण विभाजन संक्रिया पर लागू नहीं होते।

गुण: यदि x, y एवं z परिमेय संख्याएँ हैं, तो निम्न संबंध सत्य हैं:

(i) $(x + y) \div z = (x \div z) + (y \div z)$

(ii) $(x - y) \div z = (x \div z) - (y \div z)$

परंतु निम्न में से कोई भी कथन सत्य **नहीं** है:

(i) $x \div y = y \div x$

(ii) $(x \div y) \div z = x \div (y \div z)$

(iii) $x \div (y + z) = (x \div y) + (x \div z)$

(iv) $x \div (y - z) = (x \div y) - (x \div z)$

प्रश्नावली 2.4

1. निम्न का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए:

(i) 17 (ii) -19 (iii) $\frac{8}{13}$ (iv) $\frac{-13}{29}$

2. (i) $x = \frac{3}{5}, \ y = \frac{4}{9}$ तथा (ii) $x = \frac{-7}{16}, \ y = \frac{-15}{8}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x + y)^{-1} \neq x^{-1} + y^{-1}$$

3. (i) $x = \frac{3}{5}, \ y = \frac{5}{7}$ एवं (ii) $x = \frac{-7}{19}, y = \frac{-11}{13}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x - y)^{-1} \neq x^{-1} - y^{-1}$$

4. (i) $x = \frac{11}{23}, y = \frac{-17}{5}$ एवं (ii) $x = \frac{19}{17}, y = \frac{-8}{31}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x \times y)^{-1} = x^{-1} \times y^{-1}$$

5. (i) $x = \frac{10}{11}, y = \frac{12}{23}$ एवं (ii) $x = \frac{-15}{26}, y = \frac{5}{13}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x \div y)^{-1} = x^{-1} \div y^{-1}$$

6. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $-4 \div \left(\frac{-3}{5}\right)$ (ii) $-\frac{1}{8} \div \frac{3}{4}$

(iii) $\left(\frac{-7}{12}\right) \div \left(\frac{-2}{3}\right)$ (iv) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right)$

7. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{-8}{9}$ है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{-4}{15}$ है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

8. $\frac{-15}{28}$ के साथ किस संख्या का गुणा करें कि गुणनफल $\frac{-5}{7}$ हो जाए?

9. $x = \frac{8}{15}$, $y = \frac{2}{5}$ एवं $z = \frac{4}{10}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x \div y) \times z \neq x \div (y \times z)$$

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $x \div (x \times x) = x$, सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं x के लिए

(ii) $(x \div x) \times x = 1$, सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं x के लिए

(iii) $x \div (y + z) = x \div y + x \div z$ सत्य है, $y = z$ के लिए

(iv) $(x - y) \div z = x \div z - y \div z$ सत्य है, सभी $z > 0$ के लिए

(v) सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं x के लिए, $-x \div x = x \div (-x)$

2.10 दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याएँ

पूर्णांक 2 एवं 8 पर विचार करें। पूर्णांक $\frac{2+8}{2} = 5$ इस प्रकार है कि $2 < 5 < 8$ है। अर्थात् पूर्णांक 5, 2 तथा 8 के मध्य स्थित है। परंतु यदि हम पूर्णांक 5 एवं 6 लें, तो इनके मध्य कोई पूर्णांक स्थित नहीं है, यद्यपि परिमेय संख्या $\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$ अवश्य 5 एवं 6 के मध्य स्थित है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि दो पूर्णांकों के मध्य कोई पूर्णांक स्थित हो या नहीं परंतु एक

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{4}{9}\times\frac{-13}{3}\right)\times\frac{15}{7}=\frac{4\times(-13)}{9\times3}\times\frac{15}{7}$$

$$=\frac{-52}{27}\times\frac{15}{7}$$

$$=\frac{-780}{189}=\frac{-260}{63}$$

तथा $\frac{4}{9}\times\left(\frac{-13}{3}\times\frac{15}{7}\right)=\frac{4}{9}\times\left(\frac{-195}{21}\right)$

$$=\frac{-780}{189}=\frac{-260}{63}$$

ये सभी गुणन के निम्न गुण के अनुरूप हैं:

गुण II: *यदि x, y एवं z तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो*

$$(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$$

इस गुण के कारण हम तीन या अधिक परिमेय संख्याओं को कोष्ठकों को देखे बिना गुणा कर सकते हैं। समुचित उदाहरणों द्वारा हम देख सकते हैं कि यदि x, y, z एवं t चार परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$(x\times y)\times(z\times t)=[x\times(y\times z)]\times t=[(x\times y)\times z]\times t$$

$$=x\times[(y\times z)\times t]=x\times[y\times(z\times t)]$$

ये सभी $x\times y\times z\times t$ के रूप में लिखे जा सकते हैं।

हम जानते हैं कि 0 तथा 1 विशेष प्रकार के पूर्णांक हैं। 0 से गुणा करने पर कोई भी पूर्णांक 0 हो जाता है, जबकि 1 से गुणा करने पर पूर्णांक में कोई परिवर्तन नहीं होता। 0 तथा 1 परिमेय संख्याओं के साथ भी इसी तरह का गुण रखते हैं।

गुण III: *यदि x एक परिमेय संख्या है, तो*

$$x\times0=0\times x=0$$

स्पष्टीकरण के तौर पर,

$$\frac{73}{82}\times 0 = \frac{73}{82}\times\frac{0}{1}$$
$$= \frac{73\times 0}{82\times 1}$$
$$= \frac{0}{82}$$
$$= 0$$

$$0\times\frac{-105}{279} = \frac{0}{1}\times\frac{-105}{279}$$
$$= \frac{0\times(-105)}{1\times 279}$$
$$= \frac{0}{279}$$
$$= 0$$

गुण IV: *यदि x एक परिमेय संख्या है, तो*

$$x\times 1 = 1\times x = x$$

उदाहरणार्थ,

$$\frac{386}{273}\times 1 = \frac{386}{273}\times\frac{1}{1}$$
$$= \frac{386\times 1}{273\times 1} = \frac{386}{273}$$

$$1\times\frac{-983}{1010} = \frac{1}{1}\times\frac{-983}{1010}$$
$$= \frac{1\times(-983)}{1\times(1010)} = \frac{-983}{1010}$$

पूर्णांकों के गुणन का एक महत्त्वपूर्ण गुण है जिसके अनुसार,

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z,$$

अर्थात् पहले जोड़ कर गुणा करने से वही प्राप्त होता है जो पहले गुणा कर फिर जोड़ने से प्राप्त होता है। इसी प्रकार,

$$x \times (y - z) = x \times y - x \times z$$

परिमेय संख्याओं के लिए भी ये गुण हमें प्राप्त हैं।

गुण V: यदि x, y और z परिमेय संख्याएँ हैं, तो

(i) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

(ii) $x \times (y - z) = x \times y - x \times z$

उदाहरण 10: (i) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{9}{5}+\frac{6}{7}\right)$ तथा (ii) $\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$ प्राप्त कीजिए और जाँचिए कि ये संख्याएँ बराबर हैं।

हल: (i) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{9}{5}+\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{9\times7+6\times5}{5\times7}\right)$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{63+30}{35} = \frac{2}{3}\times\frac{93}{35}$$

$$= \frac{186}{105} = \frac{62}{35}$$

(ii) $\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7} = \frac{2\times9}{3\times5}+\frac{2\times6}{3\times7}$

$$= \frac{18}{15}+\frac{12}{21}$$

$$= \frac{126+60}{105}$$

$$= \frac{186}{105}$$

$$= \frac{62}{35}$$

इस प्रकार, दोनों परिमेय संख्याएँ बराबर हैं।

उदाहरण 11: निम्न परिमेय संख्याओं को सरल कीजिए और जाँचिए कि क्या ये बराबर हैं।

(i) $\frac{7}{12}\times\left(\frac{28}{13}-\frac{5}{11}\right)$ (ii) $\frac{7}{12}\times\frac{28}{13}-\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}$

हल: (i) $\frac{7}{12}\times\left(\frac{28}{13}-\frac{5}{11}\right)$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{28\times11-5\times13}{13\times11}$$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{308-65}{143}$$

$$=\frac{7}{12}\times\frac{243}{143}$$

$$=\frac{1701}{1716}$$

$$=\frac{567}{572}$$

(ii) $\frac{7}{12}\times\frac{28}{13}-\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}$

$$=\frac{196}{156}-\frac{35}{132}$$

$$=\frac{196\times11-35\times13}{1716}$$

$$=\frac{2156-455}{1716}$$

$$=\frac{1701}{1716}$$

$$=\frac{567}{572}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि दोनों परिमेय संख्याएँ बराबर हैं।

प्रश्नावली 2.3

1. गुणा कीजिए:

(i) $\frac{3}{11}$ को $\frac{2}{5}$ से

(ii) $\frac{3}{7}$ को $\left(\frac{-2}{5}\right)$ से

(iii) $\left(\frac{-2}{9}\right)$ को $\frac{33}{54}$ से

(iv) $\left(\frac{-3}{7}\right)$ को $\frac{7}{5}$ से

(v) $\left(\frac{-5}{17}\right)$ को $\frac{3}{10}$ से

(vi) $\frac{6}{7}$ को $\left(\frac{-17}{18}\right)$ से

(vii) $\left(\frac{5}{-13}\right)$ को $\left(\frac{-26}{15}\right)$ से

(viii) $\left(\frac{-6}{11}\right)$ को $\frac{44}{13}$ से

(ix) $\left(\frac{9}{-11}\right)$ को $\frac{22}{-27}$ से

(x) $\left(\frac{-8}{25}\right)$ को $\left(\frac{-5}{16}\right)$ से

2. निम्न व्यंजकों को सरल कर मानक परिमेय संख्या के रूप में लिखिए:

(i) $\frac{-8}{7}\times\frac{14}{5}$

(ii) $\frac{7}{3}\times\frac{-1}{28}$

(iii) $\frac{-14}{9}\times(-27)$

(iv) $\frac{13}{6}\times\frac{-18}{91}$

3. गुण $x\times y = y\times x$ का सत्यापन कीजिए, जहाँ

(i) $x=\frac{-1}{5},\ y=\frac{2}{7}$

(ii) $x=\frac{2}{7},\ y=\frac{-11}{8}$

(iii) $x=0,\ y=\frac{-15}{4}$

(iv) $x=1,\ y=\frac{-7}{2}$

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) $\frac{-5}{13} \times \frac{-6}{11} = \frac{-6}{11} \times \frac{-5}{13}$ (एक उदाहरण)

(ii) $-4 \times \frac{5}{9} =$...............

(iii) $\frac{3}{11} \times \frac{-5}{8} =$ ....

(iv) $-6 \times \frac{-3}{-7} =$.............

5. निम्न मानों के साथ गुण $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ का सत्यापन कीजिए:

(i) $x = \frac{7}{4}, y = \frac{-11}{3}, z = \frac{1}{2}$ (ii) $x = 0, y = \frac{-12}{5}, z = \frac{2}{5}$

(iii) $x = 1, y = \frac{-5}{2}, z = \frac{2}{5}$ (iv) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{-7}{5}$

6. रिक्त स्थान भरिए:

(i) $\left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{-7}{8}\right) = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{-7}{8}$ (एक उदाहरण)

(ii) $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{-5}{13}\right) =$ ....

(iii) $-4 \times \left(-6 \times \frac{-7}{11}\right) =$ ....

(iv) $\frac{-2}{9} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{7}\right) =$ ....

7. दिए हुए मान लेकर गुण $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ को सत्यापित कीजिए:

(i) $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{5}{2}, z = \frac{7}{6}$ (ii) $x = -2, y = \frac{9}{5}, z = \frac{2}{3}$

(iii) $x = \frac{-5}{2}, y = \frac{16}{3}, z = -1$ (iv) $x = 0, y = \frac{-8}{3}, z = 1$

8. प्रश्न 7 में दिए गए x, y, z के मान लेकर, गुण

$x \times (y - z) = x \times y - x \times z$

का सत्यापन कीजिए।

9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) $\frac{-4}{5} \times \left(\frac{5}{7} + \frac{-8}{9}\right) = \left(\frac{-4}{5} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{-4}{5} \times \frac{-8}{9}\right)$ (एक उदाहरण)

(ii) $\frac{-3}{8} \times \left(\frac{-6}{11} + \frac{4}{9}\right) =$ ....

(iii) $6 \times \left(\frac{5}{13} + \frac{-3}{4}\right) =$ ....

(iv) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-5}{7} - \frac{4}{5}\right) =$ ....

(v) $\frac{-4}{7} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{-2}{3}\right) =$ ....

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $-1 \times x$ धनात्मक है, यदि x ऋणात्मक है।

(ii) $-1 \times (0 - x)$ ऋणात्मक है, यदि x धनात्मक है।

(iii) $-x \times y$ धनात्मक है, यदि y ऋणात्मक है।

(iv) $x \times (y + z)$ शून्येतर है, यदि x शून्येतर है।

(v) यदि $x \times (y - z)$ शून्य है, तो $y = z$ होगा।

(vi) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल कभी पूर्णांक नहीं होगा।

(vii) दो पूर्णांकों का गुणनफल कभी भिन्न नहीं होगा।

(viii) परिमेय संख्या x के लिए, $x \times y = y + y + \ldots.\ x$ बार होता है।

2.8 किसी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम

आइए, एक परिमेय संख्या $\frac{3}{7}$ पर विचार करें, जो दो पूर्णांकों 3 (अंश) एवं 7 (हर) से मिलकर बनी है। इस संख्या के अंश एवं हर की अदला–बदली करने पर एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{7}{3}$ प्राप्त होती है। इस प्रकार, यदि $\frac{p}{q}$ एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $\frac{q}{p}$ एक दूसरी परिमेय संख्या है। यह संख्या $\frac{p}{q}$ का *व्युत्क्रम* (*reciprocal*) कहलाती है। इस प्रकार, $\frac{7}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{3}{7}$ का व्युत्क्रम है। इसी प्रकार, $\frac{9}{-13}$ या $\frac{-9}{13}$ संख्या $\frac{-13}{9}$ का व्युत्क्रम है तथा $\frac{-105}{113}$ संख्या $\frac{113}{-105}$ या $\frac{-113}{105}$ का व्युत्क्रम है।

हम यहाँ देख सकते हैं कि यदि $\frac{q}{p}$ संख्या $\frac{p}{q}$ का व्युत्क्रम है, तो $\frac{p}{q}$ संख्या $\frac{q}{p}$ का व्युत्क्रम है। दूसरे शब्दों में, $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{q}{p}$ एक–दूसरे के व्युत्क्रम हैं। यदि हम $\frac{p}{q}$ को x से दर्शाते हैं, तो इसके व्युत्क्रम $\frac{q}{p}$ को दर्शाने के लिए x^{-1} का प्रयोग करते हैं। अर्थात् हम लिखेंगे:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$$

यहाँ से हम दो तथ्य देख पाते हैं:

1. $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$

दोनों ओर का व्युत्क्रम लेने पर,

$$\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \qquad (\because \frac{q}{p} \text{ का व्युत्क्रम } \frac{p}{q} \text{ है})$$

$\frac{p}{q} = x$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

इस प्रकार, किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए,

$$(x^{-1})^{-1} = x \text{ है।}$$

अर्थात् *किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या के व्युत्क्रम का व्युत्क्रम वह संख्या ही होती है।*

2. $$\left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \times \frac{q}{p}$$

$$= \frac{p \times q}{q \times p}$$

$$= 1$$

इस प्रकार, किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए

$$x \times x^{-1} = 1 \text{ है।}$$

अर्थात् *किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या एवं उसके व्युत्क्रम का गुणनफल सदैव* 1 *होता है।*

इस संबंध के कारण हम व्युत्क्रम x^{-1} को $\frac{1}{x}$ से भी दर्शाते हैं।

ध्यान दीजिए कि परिमेय संख्या के रूप में 0 का कोई व्युत्क्रम नहीं होता, क्योंकि $0 = \frac{0}{1}$ है तथा $0^{-1} = \frac{1}{0}$ है और यह परिमेय संख्या नहीं है।

उदाहरण 12: निम्न परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{7} + \frac{5}{11}$ (ii) $\frac{3}{7} - \frac{5}{11}$ (iii) $\frac{3}{7} \times \frac{5}{11}$

(iv) $\left|\frac{-3}{7}\right|$ (v) $-\left|\frac{5}{11}\right|$

हल: (i) $\frac{3}{7}+\frac{5}{11}=\frac{3\times11+5\times7}{7\times11}$

$=\frac{33+35}{77}$

$=\frac{68}{77}$

अतः, $\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{68}{77}\right)^{-1}$

$=\frac{77}{68}$

(ii) $\frac{3}{7}-\frac{5}{11}=\frac{3\times11-5\times7}{7\times11}$

$=\frac{33-35}{77}$

$=\frac{-2}{77}$

अतः, $\left(\frac{3}{7}-\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{-2}{77}\right)^{-1}=\frac{-77}{2}$

(iii) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}=\frac{3\times5}{7\times11}$

$=\frac{15}{77}$

अतः, $\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{15}{77}\right)^{-1}=\frac{77}{15}$

(iv) $\left|\frac{-3}{7}\right|^{-1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{3}$

(v) $\left(-\left|\frac{5}{11}\right|\right)^{-1} = \left(\frac{-5}{11}\right)^{-1} = \frac{-11}{5}$

उदाहरण 13: यदि x एवं y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं, तो निम्न कथनों को सत्य या असत्य लिखिए:

1. $(x + y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$
2. $(x - y)^{-1} = x^{-1} - y^{-1}$
3. $(x \times y)^{-1} = x^{-1} \times y^{-1}$
4. $|x^{-1}| = |x|^{-1}$

हल:

1. हम $x = \frac{3}{7}$ तथा $y = \frac{5}{11}$ लेने पर देखते हैं कि

$$(x + y)^{-1} = \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{11}\right)^{-1} = \left(\frac{33+35}{77}\right)^{-1} = \left(\frac{68}{77}\right)^{-1} = \frac{77}{68}, \text{ परंतु}$$

$$x^{-1} + y^{-1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{11}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{3}\right) + \left(\frac{11}{5}\right) = \frac{35+33}{15} = \frac{68}{15} \text{ है।}$$

इस प्रकार, कथन 1 असत्य है।

2. इसी प्रकार,

$$\left(\frac{3}{7} - \frac{5}{11}\right)^{-1} = \left(\frac{33-35}{77}\right)^{-1} = \frac{-77}{2}, \text{ परंतु}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{11}\right)^{-1} = \frac{7}{3} - \frac{11}{5} = \frac{2}{15} \text{ है।}$$

इस प्रकार, कथन 2 भी असत्य है।

3. $\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{11}\right)^{-1}=\left(\frac{15}{77}\right)^{-1}=\frac{77}{15}$,

तथा $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\times\left(\frac{5}{11}\right)^{-1}=\frac{7}{3}\times\frac{11}{5}=\frac{77}{15}$

इस प्रकार, x और y के इन मानों के लिए कथन 3 सत्य है। x और y के अन्य मान लेकर भी हम देख सकते हैं कि यह कथन सत्य है। वास्तव में, यदि $x=\frac{p}{q}$ तथा $y=\frac{r}{s}$ दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$(x\times y)^{-1}=\left(\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}\right)^{-1}=\left(\frac{p\times r}{q\times s}\right)^{-1}=\frac{q\times s}{p\times r}.$$

तथा $$x^{-1}\times y^{-1}=\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\times\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}=\frac{q}{p}\times\frac{s}{r}=\frac{q\times s}{p\times r}$$

इस प्रकार, कथन 3 सदैव सत्य है।

4. यदि $x=\frac{p}{q}$ है, तो

$$|x^{-1}|=\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\right|=\left|\frac{q}{p}\right|=\frac{|q|}{|p|},$$

तथा $$|x|^{-1}=\left|\frac{p}{q}\right|^{-1}=\left(\frac{|p|}{|q|}\right)^{-1}=\frac{|q|}{|p|}$$

इस प्रकार, शून्येतर संख्या x के लिए, कथन 4 भी सत्य है।

2.9 परिमेय संख्याओं का विभाजन

आइए, दो परिमेय संख्याओं x एवं y, जहाँ $y \neq 0$ है, पर विचार करें। हम x को y से विभाजित करना चाहते हैं। दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या होता है। अतः इस बात की अपेक्षा करना स्वाभाविक ही है कि दो परिमेय संख्याओं के विभाजन से भी परिमेय संख्या ही प्राप्त होगी। वास्तव में यह सच भी है।

मान लीजिए $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं। गुणनफल के समान ही, हम अंशों एवं हरों को अलग-अलग विभाजित करते हैं। अर्थात् हम लिखते हैं:

$$\boxed{\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p \div r}{q \div s}}$$

यदि $p \div r$ एवं $q \div s$ से हमें पूर्णांक प्राप्त होते हैं, तो उपर्युक्त संक्रिया से हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए,

$$\frac{8}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{8 \div 2}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{81}{605} \div \frac{27}{11} = \frac{81 \div 27}{605 \div 11} = \frac{3}{55}$$

परंतु यदि $p \div r$ एवं $q \div s$ में से एक या दोनों पूर्णांक नहीं हैं, अर्थात् परिमेय संख्याएँ हैं, तो उपर्युक्त संक्रिया से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{\text{परिमेय संख्या}}{\text{परिमेय संख्या}}$$

और इस प्रकार, हम उसी समस्या पर लौट आए, जिसमें एक परिमेय संख्या को दूसरी परिमेय संख्या से विभाजित करना है। इसलिए परिमेय संख्याओं के विभाजन को हम एक दूसरे दृष्टिकोण से देखेंगे और इसके लिए परिमेय संख्या के व्युत्क्रम का प्रयोग करेंगे।

यदि 8 एवं 2 दो पूर्णांक लें, तो

$$8 \div 2 = 4$$

परिमेय संख्याओं के रूप में हम इसे लिखेंगे:

$$\frac{8}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{4}{1}$$

हम जानते हैं कि

$$\frac{8}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{8 \times 1}{1 \times 2} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}$$

व्युत्क्रम का प्रयोग कर, हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{8}{1} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-1} = \frac{4}{1}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

$$\frac{8}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{8}{1} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-1}$$

$\frac{8}{1}$ को x तथा $\frac{2}{1}$ को y लिखने पर, हम कह सकते हैं कि

$$x \div y = x \times y^{-1}$$

यही वह संबंध है जिसके द्वारा हम परिमेय संख्याओं का विभाजन परिभाषित करते हैं।

यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हैं एवं $y \neq 0$ है, तो

$$\boxed{x \div y = x \times y^{-1}}$$

शब्दों में कहें, तो x *को* $y\,(\neq 0)$ *से विभाजित करने का अर्थ है* x *को* y *के व्युत्क्रम से गुणा करना।*

इस प्रकार, $8 \div \frac{5}{6} = \frac{8}{1} \times \frac{6}{5}$

$$\frac{7}{3} \div \frac{11}{23} = \frac{7}{3} \times \frac{23}{11}$$

$$\frac{-5}{9} \div \frac{-8}{29} = \frac{-5}{9} \times \frac{-29}{8}$$ आदि।

व्युत्क्रम के गुणों का प्रयोग कर, हम देख सकते हैं कि गुणन के अनेक गुण विभाजन संक्रिया पर लागू नहीं होते।

गुण: *यदि x, y एवं z परिमेय संख्याएँ हैं, तो निम्न संबंध सत्य हैं:*

(i) $(x + y) \div z = (x \div z) + (y \div z)$

(ii) $(x - y) \div z = (x \div z) - (y \div z)$

परंतु निम्न में से कोई भी कथन सत्य **नहीं** है:

(i) $x \div y = y \div x$

(ii) $(x \div y) \div z = x \div (y \div z)$

(iii) $x \div (y + z) = (x \div y) + (x \div z)$

(iv) $x \div (y - z) = (x \div y) - (x \div z)$

प्रश्नावली 2.4

1. निम्न का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए:

   (i) 17 (ii) -19 (iii) $\frac{8}{13}$ (iv) $\frac{-13}{29}$

2. (i) $x = \frac{3}{5},\ y = \frac{4}{9}$ तथा (ii) $x = \frac{-7}{16},\ y = \frac{-15}{8}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x + y)^{-1} \neq x^{-1} + y^{-1}$$

3. (i) $x = \frac{3}{5},\ y = \frac{5}{7}$ एवं (ii) $x = \frac{-7}{19}, y = \frac{-11}{13}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x - y)^{-1} \neq x^{-1} - y^{-1}$$

4. (i) $x = \frac{11}{23}, y = \frac{-17}{5}$ एवं (ii) $x = \frac{19}{17}, y = \frac{-8}{31}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x \times y)^{-1} = x^{-1} \times y^{-1}$$

5. (i) $x = \frac{10}{11}, y = \frac{12}{23}$ एवं (ii) $x = \frac{-15}{26}, y = \frac{5}{13}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x \div y)^{-1} = x^{-1} \div y^{-1}$$

6. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $-4 \div \left(\frac{-3}{5}\right)$ (ii) $-\frac{1}{8} \div \frac{3}{4}$

(iii) $\left(\frac{-7}{12}\right) \div \left(\frac{-2}{3}\right)$ (iv) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right)$

7. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{-8}{9}$ है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{-4}{15}$ है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

8. $\frac{-15}{28}$ के साथ किस संख्या का गुणा करें कि गुणनफल $\frac{-5}{7}$ हो जाए?

9. $x = \frac{8}{15}$, $y = \frac{2}{5}$ एवं $z = \frac{4}{10}$ लेकर सत्यापित कीजिए कि

$$(x \div y) \times z \neq x \div (y \times z)$$

10. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $x \div (x \times x) = x$, सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं x के लिए

(ii) $(x \div x) \times x = 1$, सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं x के लिए

(iii) $x \div (y + z) = x \div y + x \div z$ सत्य है, $y = z$ के लिए

(iv) $(x - y) \div z = x \div z - y \div z$ सत्य है, सभी $z > 0$ के लिए

(v) सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं x के लिए, $-x \div x = x \div (-x)$

2.10 दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याएँ

पूर्णांक 2 एवं 8 पर विचार करें। पूर्णांक $\frac{2+8}{2} = 5$ इस प्रकार है कि $2 < 5 < 8$ है। अर्थात् पूर्णांक 5, 2 तथा 8 के मध्य स्थित है। परंतु यदि हम पूर्णांक 5 एवं 6 लें, तो इनके मध्य कोई पूर्णांक स्थित नहीं है, यद्यपि परिमेय संख्या $\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$ अवश्य 5 एवं 6 के मध्य स्थित है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि दो पूर्णांकों के मध्य कोई पूर्णांक स्थित हो या नहीं परंतु एक

अब तक हम जान चुके हैं कि प्रत्येक परिमेय संख्या सांत (परिमित) दशमलव रूप में अथवा असांत आवर्ती रूप में निरूपित की जा सकती है। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि कौन-सी परिमेय संख्याएँ सांत दशमलव रूप में लिखी जा सकती हैं और कौन-सी परिमेय संख्याओं का निरूपण असांत आवर्ती है? हम देख चुके हैं कि परिमेय संख्याओं $\frac{3}{4}, \frac{17}{5}, \frac{1}{20}$ आदि के निरूपण सांत निरूपण हैं। इन परिमेय संख्याओं की क्या विशेषता है? इनके हर 4, 5, 20 या तो 2 के या 5 के या दोनों के गुणज हैं। यदि लघुतम पदों में किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के हर q के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 अथवा / और 5 ही हैं, तो q को 2 अथवा 5 की उचित घातों से गुणा कर हर को 10 की घात के रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार, परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या के तुल्य है जिसका हर 10 की घात है। स्पष्ट है कि ऐसी परिमेय संख्या सांत दशमलव के रूप में लिखी जा सकती है। उदाहरण के लिए:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{3 \times 25}{10^2} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$\frac{17}{5} = \frac{17 \times 2}{5 \times 2} = \frac{34}{10} = 3.4$$

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \times 5} = \frac{1 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{5}{2^2 \times 5^2} = \frac{5}{100} = 0.05$$

अब कुछ उन परिमेय संख्याओं को लेते हैं जिनका दशमलव निरूपण असांत आवर्ती है, जैसे $\frac{1}{3}, \frac{2}{11}, \frac{46}{101}$ आदि। हम देख सकते हैं कि इन परिमेय संख्याओं के हरों के अभाज्य गुणनखंड 2 एवं 5 से भिन्न हैं। इस प्रकार, इन हरों को किसी भी संख्या से गुणा कर 10 की घात प्राप्त करना असंभव है। स्पष्ट है कि ऐसी परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ कभी भी 10 की घात के हर वाली तुल्य परिमेय संख्या के रूप में नहीं लिखी जा सकतीं। अतः, ऐसी परिमेय संख्याएँ कभी भी सांत दशमलव के रूप में निरूपित नहीं हो सकतीं। इस प्रकार की संख्याओं के दशमलव निरूपण असांत आवर्ती होंगे।

अतः, लघुतम पदों में परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के लिए:

> $\frac{p}{q}$ = *सांत दशमलव, यदि q के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 या 5 या दोनों हैं।*
>
> $\frac{p}{q}$ = *असांत आवर्ती दशमलव, यदि 2 या 5 के अतिरिक्त भी q का कोई अभाज्य गुणनखंड है।*

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{15}{4}$ (ii) $\frac{51}{25}$ (iii) $\frac{481}{200}$ (iv) $\frac{321}{40}$

(v) $-\frac{1}{2}$ (vi) $-\frac{13}{20}$ (vii) $\frac{17}{200}$ (viii) $\frac{-21}{16}$

2. बिना विभाजन किए बताइए कि निम्न में से कौन-सी संख्याओं का दशमलव निरूपण सांत है और क्यों:

(i) $15 \div 17$ (ii) $6 \div 5$ (iii) $7 \div 6$ (iv) $25 \div 0.7$

(v) $9 \div 8$ (vi) $42 \div 9$ (vii) $0.57 \div 0.11$ (viii) $12.5 \div 4$

3. निम्न को असांत आवर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{10}{11}$ (ii) $\frac{2}{13}$ (iii) $\frac{17}{90}$ (iv) $\frac{1}{9}$

(v) $\frac{1}{37}$ (vi) $\frac{-20}{3}$ (vii) $\frac{22}{7}$ (viii) $\frac{-28}{21}$

4. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $\frac{p}{q}$ का दशमलव निरूपण सांत है, यदि q अभाज्य है।

(ii) यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दोनों का दशमलव निरूपण सांत है, तो $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ का भी दशमलव निरूपण सांत होगा।

(iii) यदि $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दोनों का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती है, तो $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ का भी एक असांत आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

(iv) $\frac{p}{q}$ एवं $\frac{r}{s}$ दोनों का ही सांत दशमलव निरूपण है, तो $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$ का निरूपण भी सांत होगा।

(v) यदि $\frac{p}{q}$ का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती है तथा $\frac{r}{s}$ का निरूपण सांत है, तो $\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}$ का निरूपण सांत हो सकता है।

3.4 परिमेय संख्याओं के साथ परिकलन

हमने देखा कि प्रत्येक परिमेय संख्या को सांत अथवा असांत आवर्ती दशमलव संख्या के रूप में लिखा जा सकता है। अब हम देखेंगे कि प्रत्येक सांत दशमलव संख्या को परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में किस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

संख्या 1.5 को हम लिख सकते हैं:

$$1.5 = 1\times1+\frac{5}{10}=\frac{10+5}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$ (लघुतम रूप)

इसी प्रकार,

$$5.03 = 5\times1+\frac{0}{10}+\frac{3}{100}=\frac{503}{100}$$

$$49.72 = 4\times10+9\times1+\frac{7}{10}+\frac{2}{100}=\frac{4972}{100}$$

$$0.0006 = \frac{6}{10000}$$ आदि।

उदाहरण 4: निम्न दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखिए:

(i) 0.45 (ii) 0.758 (iii) 2.14285 (iv) – 3.25

हल: (i) $0.45 = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

(ii) $0.758 = \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{758}{1000} = \frac{379}{500}$

(iii) $2.14285 = \frac{214285}{100000} = \frac{42857}{20000}$

(iv) $-3.25 = \frac{-325}{100} = \frac{-13}{4}$

उदाहरण 5: निम्नलिखित संख्याओं का योग प्राप्त कीजिए तथा योग को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

$0.4, -0.37, 0.54, -0.76$

हल: संख्याओं का योग है:

$$0.4 + (-0.37) + (0.54) + (-0.76)$$
$$= (0.4 + 0.54) + (-0.37 - 0.76)$$
$$= 0.94 + (-1.13)$$
$$= -0.19$$
$$= \frac{-19}{100}$$

उदाहरण 6: (i) योग $0.39 + 0.750 + 2.15 + (-1.001)$ को दशमलव रूप में प्राप्त कर परिमेय संख्या के रूप में बदलिए।

(ii) उपर्युक्त (i) में संख्याओं को परिमेय रूप में लिखकर योग प्राप्त कीजिए।

हल: (i) $0.39 + 0.750 + 2.15 + (-1.001)$

$$= 3.290 - 1.001$$
$$= 2.289$$
$$= \frac{2289}{1000}$$

(ii) $0.39 + 0.750 + 2.15 + (-1.001)$

$$= \frac{39}{100} + \frac{750}{1000} + \frac{215}{100} + \left(-\frac{1001}{1000}\right)$$

$$= \frac{3290}{1000} - \frac{1001}{1000}$$

$$= \frac{3290 - 1001}{1000}$$

$$= \frac{2289}{1000}$$

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं में बदलकर मानक रूप में लिखिए:

   (i) 2.8 (ii) 0.037 (iii) – 0.75 (iv) – 8.625
   (v) – 0.79 (vi) 7.543 (vii) 9.6 (viii) – 5.875

2. निम्नलिखित संख्याओं को जोड़कर योग को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) 3.8 एवं 8.7 (ii) – 5.4 एवं 9.8
   (iii) – 0.82 एवं 8.6 (iv) 26.86 एवं – 3.92
   (v) 3.007, 0.587 एवं 18.341 (vi) 3.4, 2.025, 9.36 एवं 3.6221

3. सरल कीजिए तथा सरलीकृत संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए:

   (i) $28.796 - 13.42 - 2.555$

   (ii) $36 - 18.59 - 3.2$

   (iii) $32.8 - 13 - 10.725 + 3.517$

   (iv) $(6.25 + 0.36) - (17.2 - 8.97)$

   (v) $879.4 - (87.94 - 8.794)$

4. निम्नलिखित का मान प्राप्त कीजिए तथा प्राप्त मान को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) 16.32×28 (ii) $0.84 \times 2.2 \times 4$

(iii) $(2.1)^2 \times (1.5)^2$ (iv) $2.4 \times 3.5 \times 4.8$

(v) $0.3 \times 0.03 \times 0.003$

5. निम्नलिखित का मान प्राप्त कीजिए तथा प्राप्त संख्या को परिमेय संख्या के रूप में लिखिए:

(i) $4.32 \div 1.2$ (ii) $4.8432 \div 0.08$

(iii) $(1.2)^2 \times (0.9)^2 \div 1000$ (iv) $6.3 \div (0.3)^2$

(v) $257.894 \div 0.169$

याद रखने योग्य बातें

1. प्रत्येक परिमित पदों वाली दशमलव संख्या एक परिमेय संख्या होती है।
2. प्रत्येक परिमेय संख्या का एक दशमलव निरूपण होता है।
3. $\frac{p}{q}$ का दशमलव निरूपण सांत होता है, यदि $\frac{p}{q}$ को लघुतम पदों में लिखने पर प्राप्त हर के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 या 5 अथवा दोनों ही होते हैं।
4. लघुतम पदों वाली संख्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती होता है, यदि q का एक अभाज्य गुणनखंड 2 एवं 5 से भिन्न हो।
5. संख्या $\frac{p}{q}$ अनेक तुल्य रूपों में लिखी जा सकती है, परंतु इसका दशमलव निरूपण एक ही, अर्थात् अद्‌वितीय होता है।

अध्याय 4

4.1 भूमिका

पूर्णांकों की घातों के बारे में हम पहले ही पढ़ चुके हैं। उदाहरण के लिए, 5^4 का अर्थ है:

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

इसी प्रकार, $$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3)$$

संकेत 5^4 को हम '*5 की घात 4*' या '5 घात 4' या '*5 की चौथी घात*' पढ़ते हैं। इसी प्रकार, $(-3)^3$ को हम '−3 घात 3' पढ़ते हैं। 5^4 में संख्या 5 को *आधार* (*base*) तथा 4 को *घातांक* (*exponent* या *index*) कहते हैं। घात $(-3)^3$ में −3 आधार तथा 3 घातांक है। इस अध्याय में, हम घातांकीय संकेतन की इस विधि को परिमेय संख्याओं के लिए प्रयोग करना सीखेंगे। इस अध्याय में, हम ऋणात्मक घातांकों का भी अध्ययन करेंगे। घातांकीय संकेतन बहुत बड़ी तथा बहुत छोटी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए एक सुविधाजनक प्रक्रिया है। इस अध्याय के अंत में, हम आधार 10 के धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांकों द्वारा बहुत बड़ी एवं बहुत छोटी संख्याओं के निरूपण की विधि भी सीखेंगे।

4.2 धनात्मक घातांक

आइए, परिमेय संख्या $\frac{3}{4}$ पर विचार करें। इस संख्या को इसी से गुणा करने पर प्राप्त होने वाली संख्या को हम $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ से दर्शाते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

इसी प्रकार, $\frac{3}{4}$ को स्वयं से 5 बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या को $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ से दर्शाते हैं, अर्थात्

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

कुछ अन्य उदाहरण हैं:

$$\left(\frac{-1}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{5}\right)=\left(\frac{-1}{5}\right)^3$$

$$\frac{-43}{79}\times\frac{-43}{79}\times\frac{-43}{79}\times\frac{-43}{79}=\left(\frac{-43}{79}\right)^4$$ इत्यादि।

व्यापक रूप में, यदि x एक परिमेय संख्या है और m एक धनात्मक पूर्णांक है, तो x को x के साथ m बार गुणा करने से प्राप्त संख्या को x^m से प्रदर्शित करते हैं।

अर्थात् $\quad x\times x\times \dots m \text{ बार } = x^m$

पहले के समान ही, यहाँ x *आधार* तथा m *घातांक* या x *की घात* कहलाता है। परिमेय संख्याओं की परिभाषा और फिर पूर्णांकों के घातांकों का प्रयोग कर, हम लिख सकते हैं कि

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 4}=\frac{3^2}{4^2}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times3\times3\times3}{4\times4\times4\times4\times4}=\frac{3^5}{4^5}$$

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{-1}{5}\right)^3=\left(\frac{-1}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{5}\right)=\frac{(-1)\times(-1)\times(-1)}{5\times5\times5}=\frac{(-1)^3}{5^3}$$

व्यापक रूप में,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m=\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\ \dots m \text{ बार}$$

$$=\frac{p\times p\times\dots m\text{ बार}}{q\times q\times\dots m\text{ बार}}=\frac{p^m}{q^m}$$

इस प्रकार, किसी भी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ एवं धनात्मक पूर्णांक m के लिए,

$$\boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}}$$

इस संबंध से स्पष्ट है कि

(i) परिमेय संख्या की घात एक परिमेय संख्या होती है।

(ii) घात $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ का अंश संख्या $\frac{p}{q}$ के अंश की घात, अर्थात् p^m होता है।

(iii) संख्या की घात का हर उस संख्या के हर की घात होता है। अर्थात् $\left(\frac{p}{q}\right)^m$ का हर q^m होता है।

इस संबंध का प्रयोग कर हम परिमेय संख्या की किसी भी घात को एक परिमेय संख्या के मानक रूप में लिख सकते हैं। इसी प्रकार, किसी परिमेय संख्या को भी, यदि संभव हो तो, किसी उचित परिमेय संख्या की घात के रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरण 1: निम्न को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\left(\frac{7}{9}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-5}{11}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{69}{72}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{21}{-25}\right)^3$

हल: (i) $\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{7^3}{9^3} = \frac{343}{729}$

(ii) $\left(\frac{-5}{11}\right)^4 = \frac{(-5)^4}{11^4} = \frac{625}{14641}$

(iii) $\left(\frac{69}{72}\right)^2 = \frac{69^2}{72^2} = \frac{4761}{5184} = \frac{529}{576}$

(iv) $\left(\frac{21}{-25}\right)^3 = \frac{21^3}{(-25)^3} = \frac{9261}{-15625} = \frac{-9261}{15625}$

उदाहरण 2: व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{81}{625}$ को $\frac{3}{5}$ की घात के रूप में

(ii) $\frac{-49}{64}$ को $\frac{7}{8}$ की घात के रूप में

(iii) $\frac{-343}{729}$ को $\frac{-7}{9}$ की घात के रूप में

हल: (i) $\frac{81}{625}=\frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}=\frac{3^4}{5^4}=\left(\frac{3}{5}\right)^4$

(ii) $\frac{-49}{64}=-\frac{7\times7}{8\times8}=-\frac{7^2}{8^2}=-\left(\frac{7}{8}\right)^2$

(iii) $\frac{-343}{729}=-\frac{7\times7\times7}{9\times9\times9}=-\frac{7^3}{9^3}=-\left(\frac{7}{9}\right)^3=\left(\frac{-7}{9}\right)^3$

उदाहरण 3: निम्न को सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3\times\left(\frac{-1}{5}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3\times\left(\frac{4}{-5}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{-1}{3}\right)^5\div\left(\frac{2}{3}\right)^3$

हल: (i) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3\times\left(\frac{-1}{5}\right)^2$

$$=\frac{(-1)^3}{5^3}\times\frac{(-1)^2}{5^2}$$

$$=\frac{-1}{125}\times\frac{1}{25}$$

$$=\frac{-1}{3125}$$

(ii) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{-5}\right)^2$

$$= \frac{(-2)^3}{3^3} \times \frac{4^2}{(-5)^2}$$

$$= \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)}{3\times3\times3} \times \frac{4\times4}{(-5)\times(-5)}$$

$$= \frac{-8}{27} \times \frac{16}{25}$$

$$= \frac{-128}{675}$$

(iii) $\left(\frac{-1}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{(-1)^5}{3^5} \div \frac{2^3}{3^3}$

$$= \frac{-1}{3\times3\times3\times3\times3} \div \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$$

$$= \frac{-1}{3\times3\times3\times3\times3} \times \frac{3\times3\times3}{2\times2\times2}$$

$$= \frac{-1}{3\times3} \times \frac{1}{2\times2\times2}$$

$$= \frac{-1}{9\times8}$$

$$= -\frac{1}{72}$$

उदाहरण 4: निम्न के व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए तथा प्रत्येक को घातीय संकेतन के रूप में लिखिए:

(i) $\frac{8}{27}$ (ii) $\frac{-125}{216}$ (iii) $-\frac{675}{392}$

हल : (i) $\frac{8}{27}$ का व्युत्क्रम $= \frac{27}{8} = \frac{3\times3\times3}{2\times2\times2} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

(ii) $\frac{-125}{216}$ का व्युत्क्रम $= \frac{216}{-125}$

$$= -\frac{2\times2\times2\times3\times3\times3}{5\times5\times5}$$

$$= -\frac{2^3\times3^3}{5^3}$$

$$= -\left(\frac{2\times3}{5}\right)^3$$

$$= -\left(\frac{6}{5}\right)^3$$

$$= \left(\frac{-6}{5}\right)^3$$

(iii) $-\frac{675}{392}$ का व्युत्क्रम $= -\frac{392}{675}$

$$= -\frac{2\times2\times2\times7\times7}{3\times3\times3\times5\times5}$$

$$= -\frac{2^3\times7^2}{3^3\times5^2}$$

$$= -\frac{2^3}{3^3}\times\frac{7^2}{5^2}$$

$$= -\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{7}{5}\right)^2$$

उदाहरण 5: निम्न का निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ (iii) $-\left(\frac{7}{8}\right)^2$

हल: (i) $\left|\left(\frac{2}{3}\right)^3\right| = \left|\frac{2^3}{3^3}\right| = \left|\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}\right| = \left|\frac{8}{27}\right| = \frac{|8|}{|27|} = \frac{8}{27}$

(ii) $\left|\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right| = \left|\frac{(-2)^4}{3^4}\right| = \left|\frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{3\times3\times3\times3}\right| = \left|\frac{16}{81}\right| = \frac{|16|}{|81|} = \frac{16}{81}$

(iii) $\left|-\left(\frac{7}{8}\right)^2\right| = \left|-\frac{7^2}{8^2}\right| = \left|-\frac{7\times7}{8\times8}\right| = \left|-\frac{49}{64}\right| = \frac{|-49|}{|64|} = \frac{49}{64}$

प्रश्नावली 4.1

1. निम्न को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ (iii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ (iv) $\left(-\frac{5}{9}\right)^3$

2. निम्न को सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4\times\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4\div\left(\frac{1}{9}\right)^6$ (iv) $(-2)^5\div\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

3. घातीय संकेतन के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{1}{243}$ (ii) $\frac{-16}{729}$

(iii) $\frac{-625}{14641}$ (iv) $\frac{-2401}{-256}$

4. सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ (ii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times 2^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$

(iii) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right] \times 2^3$ (iv) $(3^2 - 2^2) \div \left(\frac{1}{5}\right)^2$

5. निम्न का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए:

(i) $(-3)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

(iii) $\left(-\frac{1}{5}\right)^8 \div \left(\frac{1}{5}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 \times \left(\frac{7}{3}\right)^5$

6. निम्न का निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{2}{7}\right)^5$

(iii) $\left(\frac{5}{-3}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{-11}{13}\right)^2$

7. परिमेय संख्याओं $\frac{3^2}{4}$ एवं $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ में अंतर स्पष्ट कीजिए। दोनों में कौन-सी संख्या छोटी है? $\frac{3^2}{4}$ एवं $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ के मध्य 12 परिमेय संख्याएँ प्राप्त कीजिए।

4.3 घातांकों के नियम (धनात्मक घातांक)

अनेकों बार हमें समान आधार वाली संख्याओं को गुणा करना होता है।

यथा
$$2^5 \times 2^7 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^{12}$$
$$(-3)^2 \times (-3)^4 = \{(-3) \times (-3)\} \times \{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)\}$$
$$= (-3)^6$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$\left(\frac{-6}{11}\right)^4 \times \left(\frac{-6}{11}\right)^9 = \left(\frac{-6}{11}\times\frac{-6}{11}\times \ldots 4 \text{ बार}\right)\times\left(\frac{-6}{11}\times\frac{-6}{11}\times \ldots 9 \text{ बार}\right)$$

$$= \frac{-6}{11}\times\frac{-6}{11}\times \ldots 13 \text{ बार}$$

$$= \left(\frac{-6}{11}\right)^{13}$$

व्यापक रूप में, यदि x एक परिमेय संख्या है, तो

$$x^m \times x^n = (x \times x \times \ldots\ m \text{ बार}) \times (x \times x \times \ldots\ n \text{ बार})$$

$$= (x \times x \times \ldots\ m + n \text{ बार})$$

$$= x^{m+n}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि यदि समान आधार वाली दो संख्याओं को गुणा करना है, तो गुणनफल घातांकों को जोड़ने से प्राप्त हो जाता है। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है:

नियम I: *यदि x एक परिमेय संख्या है तथा m एवं n दो धनात्मक पूर्णांक हैं, तो*

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

यह नियम समान आधार के और अधिक गुणन के लिए भी विस्तृत किया जा सकता है।

अर्थात् $$x^m \times x^n \times x^p \times x^q = x^{m+n+p+q}$$

हम देखते हैं कि

$$5^5 \div 5^3 = \frac{5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5}$$

$$= 5 \times 5 = 5^2$$

इसी प्रकार,

$$(-3)^6 \div (-3)^3 = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)}$$

$$= (-3)\times(-3)\times(-3)$$

$$= (-3)^3$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^5 \div \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}}$$

$$= \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^3$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}}{\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}$$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right)^2$$

उपर्युक्त दृष्टांतों से निम्नलिखित नियम सत्यापित होता है:

नियम II: *यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एवं n दो धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $m > n$, तब $x^m \div x^n = x^{m-n}$ ।*

आइए, अब निम्नलिखित विभाजनों पर विचार करें:

$$5^3 \div 5^5 = \frac{5\times5\times5}{5\times5\times5\times5\times5}$$

$$= \frac{1}{5\times5}$$

$$= \frac{1}{5^2}$$

$$(-3)^3 \div (-3)^6 = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$$

$$= \frac{1}{(-3)\times(-3)\times(-3)}$$

$$= \frac{1}{(-3)^3}$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 \div \left(\frac{4}{7}\right)^5 = \frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{4}{7}\right)^3}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \div \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}}{\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-2}{3}\times\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^2}$$

उपर्युक्त विवेचन से अग्रलिखित नियम सत्यापित होता है:

नियम III: यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एवं n धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $m < n$, तब $x^m \div x^n = \frac{1}{x^{n-m}}$ ।

याद कीजिए कि नियम I के अनुसार $x^m \times x^n = x^{m+n}$ होता है। यदि $m = n$ है, तो

$$x^m \times x^m = x^{m+m}$$

या

$$(x^m)^2 = x^{2m}$$

इसी प्रकार,

$$(x^m)^3 = x^m \times x^m \times x^m$$
$$= x^{m+m+m}$$
$$= x^{3m}$$
$$(x^m)^5 = x^m \times x^m \times x^m \times x^m \times x^m$$
$$= x^{m+m+m+m+m}$$
$$= x^{5m}$$

व्यापक रूप में, हम कह सकते हैं कि

$$(x^m)^n = x^{mn} \text{ ।}$$

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है:

नियम IV: यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एवं n धनात्मक पूर्णांक हैं, तो $(x^m)^n = x^{mn}$ ।

प्रश्नावली 4.2

1. रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) $2^3 \times 2^4 = 2^{\cdots}$

(ii) $(-4)^5 \times (-4)^6 = (-4)^{\cdots}$

(iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\cdots}$

(iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^8 \div \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\cdots}$

(v) $(-4)^9 \div (-4)^3 = (-4)^{\cdots}$

(vi) $\left(-\frac{3}{7}\right)^7 \div \left(-\frac{3}{7}\right)^3 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{\cdots}$

(vii) $8^{13} \div 8^{19} = \frac{1}{8^{\cdots}}$

(viii) $(-4)^{11} \div (-4)^{15} = \frac{1}{(-4)^{\cdots}}$

2. सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{-3}{4}\right)^2$

(iii) $(-4)^6 \div (-4)^8$ (iv) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

3. सरल कीजिए तथा परिणाम को घातीय संकेतन में व्यक्त कीजिए:

(i) $\left(\frac{5}{2}\right)^6 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{11}{3}\right)^2$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{4}{5}\right)^8$

(v) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^2$ (vi) $\left[\left(\frac{-3}{4}\right)^3\right]^4$

4. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{100} = \frac{-3^{100}}{5^{100}}$ (ii) $\left|\left(\frac{-7}{80}\right)^{80}\right| = \left|\left(\frac{7}{80}\right)^{80}\right|$

(iii) $\left(\frac{9}{5}\right)^{30}$ संख्या $\left(\frac{5}{9}\right)^{30}$ का व्युत्क्रम है।

(iv) $(10^{10})^{10} = 100^{10}$

(v) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^7\right)^7$ संख्या 7^{49} का व्युत्क्रम है।

(vi) $(30 + 30)^{30} = 30^{30} + 30^{30}$

4.4 घातांकों के नियम (ऋणात्मक घातांक)

हम 3^{-2} से क्या समझते हैं? पूर्णांकों की घातों पर विचार करते समय तो यह प्रश्न हमने नहीं उठाया था। वस्तुतः, पूर्णांकों की ऋणात्मक घात लेने पर जो संख्या प्राप्त होती है वह पूर्णांक नहीं होती, वरन् एक परिमेय संख्या होती है। अब जबकि हमें परिमेय संख्याओं का ज्ञान हो चुका है, हम इस प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं।

हमने एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के व्युत्क्रम $\frac{q}{p}$ के लिए संकेतन $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$ का प्रयोग किया था। इस प्रकार, वहाँ हमने व्युत्क्रम को दर्शाने के लिए घात '-1' का प्रयोग किया था। यहाँ हम किसी संख्या की घात -1 का अर्थ उस संख्या के व्युत्क्रम से लेते हैं। दूसरे शब्दों में,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \text{ का व्युत्क्रम}$$

अर्थात् $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$ का अर्थ है $\frac{q}{p}$।

इस प्रकार, $3^{-1} = \left(\frac{3}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$

$$(-7)^{-1} = \left(\frac{-7}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$, जहाँ x एक शून्येतर पूर्णांक है।

इसी अर्थ में हम कहते हैं कि 3^{-2} संख्या 3^2 का व्युत्क्रम है, $(-7)^{-4}$ संख्या $(-7)^4$ का व्युत्क्रम है, x^{-m} संख्या x^m का व्युत्क्रम है। अर्थात्

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$(-7)^{-4} = \frac{1}{(-7)^4}$$

$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, जहाँ x एक शून्येतर पूर्णांक है।

ऋणात्मक घातांकों का यह अर्थ अब हम परिमेय संख्याओं के लिए प्रयोग कर सकते हैं।

इस प्रकार,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{9}\right)^{3} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$= \frac{7^3}{9^3} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$= \frac{9^3}{7^3} = \left(\frac{9}{7}\right)^3$$

$$\left(\frac{-15}{23}\right)^{-9} = \left(\frac{-15}{23}\right)^{9} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$= \frac{(-15)^9}{(23)^9} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$= \frac{23^9}{(-15)^9} = \left(-\frac{23}{15}\right)^9$$

इस प्रकार, हमें निम्नलिखित नियम प्राप्त होता है:

नियम I: *यदि x कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m कोई धनात्मक पूर्णांक है, तो x^{-m} संख्या x^m का व्युत्क्रम होता है, अर्थात्*

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

उदाहरण 6: निम्नलिखित के मान प्राप्त कीजिए:

(i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$ (ii) $\left(\frac{-7}{9}\right)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{-3}{11}\right)^{-3}$

हल: (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^6}$

$$= \frac{1}{\frac{2^6}{5^6}}$$

$$= \frac{5^6}{2^6}$$

$$= \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{15625}{64}$$

(ii) $\left(\frac{-7}{9}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{-7}{9}\right)^2} = \frac{1}{\frac{(-7)^2}{9^2}}$

$$= \frac{9^2}{(-7)^2}$$

$$= \frac{81}{49}$$

(iii) $\left(\frac{-3}{11}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{-3}{11}\right)^3}$

$$= \frac{1}{\frac{(-3)^3}{11^3}}$$

$$= \frac{11^3}{(-3)^3}$$

$$= -\frac{1331}{27}$$

उदाहरण 7: सरल कीजिए:

(i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-5} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

हल: (i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-5} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{3}$

$$= \frac{3\times3\times3\times3\times3}{4\times4\times4\times4\times4} \div \frac{3\times3\times3}{2\times2\times2}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3\times3}{4\times4\times4\times4\times4} \times \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$$

$$= \frac{3\times3}{2\times4\times4\times4}$$

$$= \frac{9}{128}$$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{8}{5}\right)^{7} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{5}$

$$= \frac{8\times8\times8\times8\times8\times8\times8}{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5} \times \frac{5\times5\times5\times5\times5}{8\times8\times8\times8\times8}$$

$$= \frac{8\times8}{5\times5} = \frac{64}{25}$$

उदाहरण 8: दिखाइए कि

(i) $3^7 \times 3^{-5} = 3^{7+(-5)}$

(ii) $(-8)^{-9} \times (-8)^5 = (-8)^{-9+5}$

(iii) $\left(\frac{-3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{-3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{-3}{7}\right)^{-3+(-4)}$

हल: (i) बायाँ पक्ष $= 3^7 \times 3^{-5} = 3^7 \times \frac{1}{3^5} = 3^2$

दायाँ पक्ष $= 3^{7+(-5)} = 3^2$

अत:, $3^7 \times 3^{-5} = 3^{7+(-5)}$

(ii) बायाँ पक्ष $= (-8)^{-9} \times (-8)^5$

$$= \frac{1}{(-8)^9} \times (-8)^5$$

$$= \frac{1}{(-8)^4}$$

$$= (-8)^{-4}$$

दायाँ पक्ष $= (-8)^{-9+5} = (-8)^{-4}$

$\therefore \quad (-8)^{-9} \times (-8)^5 = (-8)^{-9+5}$

(iii) बायाँ पक्ष $= \left(\frac{-3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{-3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{-7}{3}\right)^3 \times \left(\frac{-7}{3}\right)^4$

$$= \left(\frac{-7}{3}\right)^{3+4}$$

$$= \left(\frac{-3}{7}\right)^{-7}$$

दायाँ पक्ष $= \left(\frac{-3}{7}\right)^{-3+(-4)} = \left(\frac{-3}{7}\right)^{-7}$

$$\therefore \quad \left(\frac{-3}{7}\right)^{-3} \times \left(\frac{-3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{-3}{7}\right)^{-3+(-4)}$$

उपर्युक्त उदाहरणों से निम्नलिखित नियम की पुष्टि होती है:

नियम II: *यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एवं n कोई भी (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) पूर्णांक हैं, तो*

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

उपर्युक्त नियम अनुच्छेद 4.3 के नियम I के जैसा ही है। परंतु नियम I केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए है। इस प्रकार, नियम II अनुच्छेद 4.3 के नियम I का ही व्यापक रूप है।

उदाहरण 9: दिखाइए कि

(i) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4 = \left(\frac{3}{7}\right)^{-3\times4}$ (ii) $\left[\left(\frac{8}{11}\right)^{2}\right]^{-5} = \left(\frac{8}{11}\right)^{2\times(-5)}$

(iii) $\left[\left(\frac{13}{17}\right)^{-7}\right]^{-8} = \left(\frac{13}{17}\right)^{(-7)\times(-8)}$

हलः (i) बायाँ पक्ष $= \left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4 = \left[\left(\frac{7}{3}\right)^{3}\right]^4$

$$= \left(\frac{7}{3}\right)^{12}$$

साथ ही, दायाँ पक्ष $= \left(\frac{3}{7}\right)^{-3\times4} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-12}$

$$= \left(\frac{7}{3}\right)^{12}$$

अतः, $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4 = \left(\frac{3}{7}\right)^{-3\times4}$

(ii) बायाँ पक्ष $= \left[\left(\frac{8}{11}\right)^{2}\right]^{-5} = \left(\frac{8^2}{11^2}\right)^{-5}$

$$= \left(\frac{11^2}{8^2}\right)^{5}$$

$$= \frac{11^{2\times5}}{8^{2\times5}}$$

$$= \frac{11^{10}}{8^{10}}$$

साथ ही, दायाँ पक्ष $= \left(\frac{8}{11}\right)^{2\times(-5)} = \left(\frac{8}{11}\right)^{-10}$

$$= \left(\frac{11}{8}\right)^{10}$$

$$= \frac{11^{10}}{8^{10}}$$

अतः, $\left[\left(\frac{8}{11}\right)^{2}\right]^{-5} = \left(\frac{8}{11}\right)^{2\times(-5)}$

(iii) बायाँ पक्ष $= \left[\left(\frac{13}{17}\right)^{-7}\right]^{-8} = \left[\left(\frac{17}{13}\right)^{7}\right]^{-8}$

$$= \left(\frac{17^7}{13^7}\right)^{-8}$$

$$= \left(\frac{13^7}{17^7}\right)^{8}$$

$$= \frac{13^{7\times8}}{17^{7\times8}} = \frac{13^{56}}{17^{56}}$$

साथ ही, दायाँ पक्ष $= \left(\frac{13}{17}\right)^{(-7)\times(-8)} = \left(\frac{13}{17}\right)^{56}$

$$= \frac{13^{56}}{17^{56}}$$

अत:, $$\left[\left(\frac{13}{17}\right)^{-7}\right]^{-8} = \left(\frac{13}{17}\right)^{(-7)\times(-8)}$$

उपर्युक्त उदाहरण निम्नलिखित नियम की पुष्टि करते हैं:

नियम III: *यदि x कोई शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m एवं n दो पूर्णांक हैं, तो*

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

इस नियम की अनुच्छेद 4.3 के नियम IV से तुलना करने पर हम पाते हैं कि नियम IV केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए ही है, जबकि उपर्युक्त नियम III ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी लागू होता है। अत: प्रयोग के दृष्टिकोण से यह नियम III अधिक व्यापक है। अब इस नियम से हम एक रोचक परिणाम प्राप्त करेंगे।

निम्न कथनों पर विचार कीजिए:

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0$$ (नियम III के अनुसार)

साथ ही, $2^3 \times 2^{-3} = 2^3 \times \frac{1}{2^3} = 1$ (सरल करने पर)

अर्थात् $$2^0 = 1$$

इसी प्रकार, $$(-3)^5 \times (-3)^{-5} = (-3)^{5+(-5)} = (-3)^0$$

तथा $$(-3)^5 \times (-3)^{-5} = (-3)^5 \times \frac{1}{(-3)^5} = 1$$

अर्थात् $$(-3)^0 = 1$$

उपरोक्त उदाहरण जिस तथ्य की पुष्टि करते हैं वह है:

यदि x एक शून्येतर पूर्णांक है, तो $x^0 = 1$ होता है।

यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ है, तो

$$x^0 = \left(\frac{p}{q}\right)^0 = \frac{p^0}{q^0} = \frac{1}{1} = 1$$

अर्थात् यह तथ्य शून्येतर परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है। इस प्रकार से जो नियम सत्यापित होता है वह है:

नियम IV: *यदि x एक शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $x^0 = 1$ होता है।*

अब हम गुणनफलों के घातांकों पर विचार करेंगे।

यदि x एवं y दो पूर्णांक हैं, तो

$$(x \times y)^2 = (x \times y) \times (x \times y)$$
$$= (x \times x) \times (y \times y)$$
$$= x^2 \times y^2$$

इसी प्रकार,

$$(x \times y)^5 = (x \times y) \times (x \times y) \times (x \times y) \times (x \times y) \times (x \times y)$$
$$= (x \times x \times x \times x \times x) \times (y \times y \times y \times y \times y)$$
$$= x^5 \times y^5$$

अतः, किसी भी धनात्मक पूर्णांक m के लिए,

$$\boxed{(x \times y)^m = x^m \times y^m}$$

इसी प्रकार,

$$(x \times y)^{-m} = \frac{1}{(x \times y)^m} = \frac{1}{x^m \times y^m} = \frac{1}{x^m} \times \frac{1}{y^m}$$

या

$$\boxed{(x \times y)^{-m} = x^{-m} \times y^{-m}}$$

उदाहरण 10: दिखाइए कि

(i) $$\left(\frac{7}{11} \times \frac{8}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{11}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^3$$

(ii) $$\left(\frac{-13}{15} \times \frac{19}{16}\right)^{-7} = \left(\frac{-13}{15}\right)^{-7} \times \left(\frac{19}{16}\right)^{-7}$$

हल: (i) बायाँ पक्ष $= \left(\frac{7}{11} \times \frac{8}{3}\right)^3 = \left(\frac{7 \times 8}{11 \times 3}\right)^3$

$$= \frac{(7 \times 8)^3}{(11 \times 3)^3}$$

$$= \frac{7^3 \times 8^3}{11^3 \times 3^3}$$

साथ ही, दायाँ पक्ष $= \left(\frac{7}{11}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^3$

$$= \frac{7^3}{11^3} \times \frac{8^3}{3^3}$$

$$= \frac{7^3 \times 8^3}{11^3 \times 3^3}$$

इस प्रकार, $\left(\frac{7}{11} \times \frac{8}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{11}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^3$

(ii) बायाँ पक्ष $= \left(\frac{-13}{15} \times \frac{19}{16}\right)^{-7} = \left(\frac{-13 \times 19}{15 \times 16}\right)^{-7}$

$$= \left(\frac{15 \times 16}{-13 \times 19}\right)^7$$

$$= \frac{(15 \times 16)^7}{(-13 \times 19)^7}$$

$$= \frac{15^7 \times 16^7}{(-13)^7 \times (19)^7}$$

दायाँ पक्ष $= \left(\frac{-13}{15}\right)^{-7} \times \left(\frac{19}{16}\right)^{-7} = \left(\frac{15}{-13}\right)^7 \times \left(\frac{16}{19}\right)^7$

$$= \frac{15^7}{(-13)^7} \times \frac{16^7}{19^7}$$

$$= \frac{15^7 \times 16^7}{(-13)^7 \times 19^7}$$

अतः, $\left(\frac{-13}{15} \times \frac{19}{16}\right)^{-7} = \left(\frac{-13}{15}\right)^{-7} \times \left(\frac{19}{16}\right)^{-7}$

इस उदाहरण से निम्नलिखित नियम की सत्यता प्राप्त होती है:

नियम V: *यदि x एवं y शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं तथा m कोई पूर्णांक है, तो*

$$(x \times y)^m = x^m \times y^m$$

उदाहरण 11: x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(i) $\left(\frac{7}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{4}\right)^{x-2}$ (ii) $\left(\frac{125}{8}\right)^{5} \times \left(\frac{125}{8}\right)^{x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{18}$

हल: (i) $\left(\frac{7}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{4}\right)^{x-2}$

$\therefore$ $\left(\frac{7}{4}\right)^{-3+(-5)} = \left(\frac{7}{4}\right)^{x-2}$ (नियम II)

इस प्रकार, $-3 + (-5) = x - 2$

या $-8 = x - 2$

या $-8 + 2 = x - 2 + 2$

या $-6 = x$

अतः, $x = -6$

(ii) बायाँ पक्ष $= \left(\frac{125}{8}\right)^{5} \times \left(\frac{125}{8}\right)^{x} = \left(\frac{125}{8}\right)^{5+x}$

साथ ही, $\frac{125}{8} = \frac{5 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2} = \frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3}$

अतः, $\left(\frac{125}{8}\right)^{5+x} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^{3}\right]^{5+x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3\times(5+x)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{15+3x}$

इसे दाएँ पक्ष के बराबर रखने पर,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{15+3x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{18}$$

$$15 + 3x = 18$$

या $3x = 3$

या $x = 1$

प्रश्नावली 4.3

1. मान प्राप्त कीजिए:

(i) 2^{-3} (ii) $(-3)^{-4}$ (iii) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$ (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

(v) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2}$ (vi) $\left(\frac{4}{-7}\right)^{-3}$ (vii) $\left(\frac{-3}{4}\right)^{-4}$

2. घातांकों के नियमों का उपयोग कर निम्न संख्याओं को परिमेय संख्याओं की धनात्मक घातों के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (ii) $(2^{-4})^2$ (iii) $4^3 \times 4^{-5}$

(iv) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^3$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$ (vi) $(2^5 \div 2^8) \times 2^{-7}$

3. निम्न को परिमेय संख्या की ऋणात्मक घात के रूप में लिखिए:

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (ii) $(2^4)^3$ (iii) $4^3 \times 4^4$

(iv) $\left[\left(\frac{-6}{5}\right)^3\right]^2$ (v) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (vi) $(3^7 \div 3^3) \times 3^3$

4. मान प्राप्त कीजिए:

(i) 3^0 (ii) 4^{5-5} (iii) $\left(\frac{5}{7}\right)^{4+2-6}$

(iv) $(-3)^{3\times5-6-9}$ (v) $2^0 + 3^0 + 4^0$ (vi) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$

(vii) $(3^0 - 2^0) \times 5^0$ (viii) $(6^0 - 2^0) \times (6^0 + 2^0)$

5. 3^{-7} को किस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल 3 हो जाए?

6. $(-4)^5$ को किस संख्या से विभाजित करें कि भागफल 4^{-2} हो जाए?

7. यदि $\left(\frac{5}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^{8x}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\left(\frac{2}{9}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{9}\right)^{2m-1}$ हो, तो m क्या होगा?

9. परिमेय संख्या $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\frac{p}{q} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \div \left(\frac{6}{7}\right)^{0}$ है, तो $\left(\frac{p}{q}\right)^{-3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times 3^{-1} \times \frac{1}{6}$ को सरल कीजिए।

12. दिखाइए कि

(i) $\left(\frac{9}{13} \times \frac{-11}{17}\right)^{-8} = \left(\frac{13}{9}\right)^{8} \times \left(\frac{17}{-11}\right)^{8}$

(ii) $\left(\frac{-12}{19} \times \frac{-27}{43}\right)^{-7} = \left(\frac{19}{12}\right)^{7} \times \left(\frac{43}{27}\right)^{7}$

13. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए:

(i) $a^{b} > b^{a}, a = 3$ एवं $b = 4$ के लिए सत्य है; परंतु $a = 2$ तथा $b = 3$ के लिए असत्य है।

(ii) सभी पूर्णांकों a एवं b के लिए,

$$(a + b)^{2} \geq a^{2} + b^{2}$$
$$(a - b)^{2} \leq a^{2} + b^{2}$$

(iii) सभी शून्येतर परिमेय संख्याओं के लिए,

x^{m} का व्युत्क्रम = (x का व्युत्क्रम)^{m}

(iv) संबंध $x^{m} \div x^{n} = x^{m-n}$ सत्य है, यदि $x > 0$ तथा $m \geq n$ ।

(v) $x^{0} \times x^{0} = \frac{x^{0}}{x^{0}}$, सभी शून्येतर x के लिए सत्य है।

4.5 बड़ी एवं छोटी संख्याओं को व्यक्त करने में घातांकों का प्रयोग

अनेक स्थितियों में हमें बहुत बड़ी संख्याओं से सामना करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, ब्रह्मांड की आयु वर्षों में, पृथ्वी का द्रव्यमान टनों में, सूर्य की पृथ्वी से दूरी किलोमीटरों में आदि कुछ ऐसी संख्याएँ हैं जो बहुत बड़ी हैं। इतनी बड़ी संख्याएँ सामान्यतः शुद्ध मान न होकर

सन्निकट मान होती हैं। उदाहरण के लिए, निर्वात में प्रकाश का वेग 299792.5 किमी प्रति सेकंड होता है, परंतु व्यवहार में हम इसका मान 300000 किमी प्रति सेकंड या 300000000 मी/सेकंड लेते हैं। इसी प्रकार, हमारे ब्रह्मांड की आयु लगभग 8,000,000,000 वर्ष है। सूर्य से पृथ्वी की औसत दूरी लगभग 150,000,000 किमी है। पृथ्वी का द्रव्यमान लगभग 5980,000,000,000,000,000,000 मीट्रिक टन है।

इतनी बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए, सामान्यत: आधार 10 वाले घातांकों का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, संख्या 300,000,000 को 3×10^8 या 30×10^7 या फिर 300×10^6 के रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार, सभी बड़ी संख्याएँ $k \times 10^n$ के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं; जहाँ k कोई सांत दशमलव संख्या है तथा n कोई *धनात्मक पूर्णांक* है। संख्या 300,000,000 को इस रूप में लिखने के लिए, हम $k = 3$ एवं $n = 8$ या $k = 30$ एवं $n = 7$ या $k = 300$ एवं $n = 6$ आदि ले सकते हैं। परंतु संकेतन पद्धति में एकरूपता लाने के लिए, हम k को प्राय: इस प्रकार चुनते हैं कि $1 \leq k < 10$ हो और फिर n इसके अनुसार चुनते हैं। इस संकेतन पद्धति में, हम लिखेंगे कि प्रकाश की गति 3×10^8 मी/सेकंड है, ब्रह्मांड की आयु 8×10^9 वर्ष है, सूर्य की पृथ्वी से दूरी 1.5×10^8 किमी है तथा पृथ्वी का द्रव्यमान 5.98×10^{21} मीट्रिक टन या 5.98×10^{24} किग्रा है।

जिस प्रकार घातीय संकेतन बहुत बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने में सहायक होता है, उसी प्रकार बहुत छोटी संख्याओं को व्यक्त करने में भी घातीय संकेतन का प्रयोग किया जा सकता है। बड़ी संख्याओं के लिए 10 की घात धनात्मक होती है, परंतु छोटी संख्याओं के लिए 10 की घात n का मान ऋणात्मक होता है। उदाहरणार्थ, तरंगदैर्ध्य (*wavelength*) का मात्रक *एंगस्ट्रॉम* (*angstrom*) है और एक एंगस्ट्रॉम का मान $\frac{1}{10,000,000,000}$ मी है। इस संख्या को हम 1×10^{-10} मी लिख सकते हैं। इसी प्रकार, संख्या 0.000000000387 को 3.87×10^{-10} या 38.7×10^{-11} या 387×10^{-12} आदि लिख सकते हैं। यहाँ भी एकरूपता को दृष्टिगत रखते हुए k का मान 1 एवं 10 के मध्य लेते हैं।

उदाहरण 12: निम्नलिखित संख्याओं को $k \times 10^n$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ n एक पूर्णांक है:

(i) 3186500000 (ii) 0.0000837

हल: (i) 3186500000 को हम लिख सकते हैं:

31865×10^5

या 3186.5×10^6

या 318.65×10^7

या 31.865×10^8

या 3.1865×10^9

या 0.31865×10^{10} आदि।

(ii) 0.0000837

$= \frac{837}{10000000}$

$= 837 \times 10^{-7}$ या 83.7×10^{-6} या 8.37×10^{-5} आदि।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्नलिखित संख्याओं को $k \times 10^n$ के रूप में लिखिए, जहाँ n का मान दिया हुआ है:

   (i) 980000000, $n = 8$ (ii) 0.000000000097, $n = -11$

   (iii) 0.00000000000055, $n = -14$ (iv) 10700000000, $n = 9$

   (v) 602000000000000000000000, $n = 22, 23$

2. निम्न संख्याओं को सामान्य रूप में लिखिए:

   (i) 6.5×10^{-6} (ii) 8.9×10^{-9} (iii) 5.6146929×10^7

   (iv) 5.8×10^{12} (v) 1.001×10^9

3. निम्नलिखित कथनों में प्रयुक्त हुई संख्याओं को $k \times 10^n$ के रूप में लिखिए, जहाँ $1 \leq k < 10$ है एवं n एक पूर्णांक है।

   (i) भारत की राजधानी में प्रतिदिन लगभग 1050000 किग्रा प्रदूषक तत्त्व वातावरण में उत्सर्जित किए जाते हैं।

   (ii) पृथ्वी पर लगभग 1, 353,000,000 घन किमी समुद्री जल है और इस जल में लगभग 1, 361,000,000 किग्रा स्वर्ण है।

   (iii) मार्च 2001 में भारत की जनसंख्या लगभग 1,027,000,000 थी, जिसमें 531, 200,000 पुरुष तथा 495, 800,000 स्त्रियाँ थीं।

   (iv) 1 माइक्रोन $= \frac{1}{1000000}$ मी ।

याद रखने योग्य बातें

1. यदि $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है तथा m एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$x^m = \frac{p^m}{q^m}$$

2. यदि m धनात्मक पूर्णांक है और $x \neq 0$ है, तो $x^{-m} = (x^{-1})^m$ होता है जहाँ x^{-1}, x का व्युत्क्रम है।

3. किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए,

$$x^0 = 1$$

4. पूर्णांकों m एवं n तथा परिमेय संख्या x, $x \neq 0$ के लिए,

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

5. पूर्णांकों m एवं n तथा शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए,

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

6. पूर्णांकों m एवं n तथा शून्येतर परिमेय संख्या x के लिए,

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

7. यदि x एवं y दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और m एक पूर्णांक है, तो

$$(x \times y)^m = x^m \times y^m$$

8. छोटी या बड़ी किसी भी संख्या को $k \times 10^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ k एक सांत दशमलव संख्या है तथा n एक पूर्णांक (बड़ी संख्याओं के लिए धनात्मक एवं छोटी संख्याओं के लिए ऋणात्मक) है। सामान्यतः k का चयन इस प्रकार करते हैं कि $1 \leq k < 10$ हो।

अतीत के झरोखे से

कक्षा 6 में, आप पढ़ चुके हैं कि विश्व की सभी प्राचीन सभ्यताओं में किसी न किसी प्रकार की संख्यांकन पद्धति प्रचलित थी। सुमेरियन-बेबीलोन सभ्यता (लगभग 5000 वर्ष ई.पू.) में केवल दो संकेत - *एक* के लिए '𒁹' एवं दस के लिए '𒌋' का प्रयोग होता था। इन संकेतों एवं खाली स्थान (अर्थात् संकेत का न होना) की सहायता से वे पर्याप्त बड़ी संख्याओं को लिख सकते थे। संख्या 60 तक उनकी पद्धति दशमलव पद्धति की तरह ही थी। 60 से बड़ी संख्याओं के लिए 60 के आधार वाली पद्धति जैसा कुछ प्रयोग में लाते थे।

मिस्र की सभ्यता के आरंभिक काल (लगभग 5000 वर्ष ई.पू.) में भी कुछ संख्यांकों का प्रयोग होता था। इस संख्यांकन पद्धति में 1 से 9 तक के लिए इतनी ही खड़ी रेखाओं (I, II, III, . . .) का प्रयोग होता था। 10, 20, ..., 100, 1000, ... जैसी संख्याओं के लिए वे अलग संकेतों का प्रयोग करते थे। इस संख्यांकन पद्धति की एक निराली बात यह थी कि इसमें संख्याओं के लिए लिपि का प्रयोग नहीं किया गया था।

तीनों संकल्पनाओं, अर्थात् दशमलव पद्धति, स्थानीय मान तथा गणनात्मक शून्य को मिलाने का अद्वितीय श्रेय भारत को जाता है। शून्य पर संक्रियाओं के बारे में सर्वप्रथम भारतीय गणितज्ञ *ब्रह्मगुप्त* (598-678 ई.) ने *ब्रह्मस्फुट सिद्धांत* में अपने विचार व्यक्त किए और इस प्रकार शून्य को एक संख्या का रूप प्रदान किया। ब्रह्मगुप्त ने लिखा है:

'शून्ययोः खडनयो खशून्य खशून्ययोर्वा बद्ध शून्यम्।'

हमारी संकेत पद्धति में इसका अर्थ है:

$a \times 0 = 0,\ 0 \times 0 = 0$ तथा $-a \times 0 = 0$

आज इस बात से सभी परिचित हैं कि गणनात्मक शून्य की परिकल्पना ने ज्ञान की सभी शिराओं की अभिवृद्धि में कितना महति योगदान किया है। इस विषय पर गणित के सर्वकालीन पाँच सर्वश्रेष्ठों में से एक *गॉस* ने लिखा है:

"ये भारत ही है जिसने मात्र दस प्रतीकों के द्वारा सभी संख्याओं को व्यक्त करने की निराली पद्धति विश्व को दी। इस पद्धति में प्रत्येक प्रतीक के दो मान हैं — स्थानीय मान तथा निरपेक्ष मान। यह अत्यंत महत्त्वपूर्ण परिकल्पना है जो देखने में इतनी सरल है कि हम इसके मूल महत्त्व की ओर ध्यान ही नहीं दे पाते। ...... इस उपलब्धि के महत्त्व को हम इस तंथ्य से समझ सकते हैं कि आर्किमीडीज तथा अपोलोनियस जैसी महानतम विभूतियों के संज्ञान से भी यह बची रही।"

संख्याओं के क्षेत्र में भारत की गौरव गाथा यहीं समाप्त नहीं होती है। भिन्नों (और इस प्रकार परिमेय संख्याओं) के क्षेत्र में, भारत का योगदान भी सम्मानित है। प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने भिन्नों का काफी उपयोग किया, यद्यपि उनके संकेत में हर अंश से ऊपर लिखा जाता था तथा

रेखिका का उपयोग नहीं होता था। ब्रह्मगुप्त ने भिन्नों को उपयोग करने के नियम दिए और ये नियम उसी प्रकार हैं जैसा आज-कल हम प्रयोग में लाते हैं। भारत से ये भिन्न तथा इनके नियम अरब संसार में फैले। प्रसिद्ध अरब गणितज्ञ अल्ख्वारिज़्मी ने इनका अरबी में अनुवाद किया। इस प्रकार अरबों के माध्यम से भारतीयों का यह ज्ञान इटली तथा पश्चिम में पहुँचा।

प्राचीन समय में लोगों के लिए परिमेय संख्या (या उनके अनुसार भिन्न संख्याओं) की आवश्यकता गणन संख्याओं एवं पूर्णांकों की आवश्यकता से बहुत बाद में उत्पन्न हुई। वास्तव में, भिन्न की अवधारणा ने लंबाई, क्षेत्रफल आदि मापों के संदर्भ में जन्म लिया। बेबीलोन निवासी अपनी गणनाओं में 60 हर वाली भिन्नों का बहुतायत से प्रयोग करते थे। मिस्र निवासी 1 अंश वाली भिन्नों जैसे $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ आदि के प्रतीकों का प्रयोग करते थे। वे संख्या के ऊपर संकेत बनाकर भिन्नों का निरूपण करते थे। इस प्रकार, उनकी संकेत पद्धति में , $\frac{1}{3}$ निरूपित करता था; , $\frac{1}{10}$ के लिए तथा , $\frac{1}{12}$ के लिए प्रयुक्त होता था। दूसरी भिन्न जिसके लिए वे पृथक संकेत का प्रयोग करते थे वह थी केवल $\frac{2}{3}$; यद्यपि वे और भी भिन्नों से परिचित थे। *रींड पेपिरस* (*Rhind Papyrus*) में हमें 1700 ई.पू. में भी मिस्रियों द्वारा $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ जैसी भिन्नों के प्रयोग के उदाहरण मिलते हैं।

यूनानी लोग भी भिन्नों से परिचित थे। वे हर को अंश के ऊपर लिखते थे, यद्यपि भिन्नों के लिए वे प्रतीकों का प्रयोग करते थे। रोमन लोग 12 हर वाली भिन्नों का प्रयोग करते थे, क्योंकि उनके बाँट एवं मुद्रा 12 भागों में विभाजित होते थे।

शून्य तथा ऋणात्मक संख्याओं की अमूर्त गणितीय संकल्पनाएँ गणित की सर्वाधिक क्रांतिकारी खोज हैं। इस प्रकार की संख्याओं का कोई मूर्त रूप नहीं है, जैसा कि धनात्मक पूर्णांकों का है। इसका श्रेय ब्रह्मगुप्त को है जिन्होंने गणनात्मक शून्य के आविष्कार करने के बाद अनुभव किया कि जिस प्रकार शून्य से आरंभ कर धनात्मक संख्याएँ अनंत तक फैली हैं, उसी प्रकार ऋणात्मक संख्याएँ भी शून्य से आरंभ होकर दूसरी दिशा में अनंत तक फैली हैं।

भौतिक वास्तविकता के अभाव में ऋणात्मक संख्याओं को लोगों ने धीरे-धीरे स्वीकारा। हमारे अपने ही गणितज्ञों जैसे *महावीर* (850 ई.) तथा *भास्कर* (1114 ई.) को भी इन्हें स्वीकार करने में कुछ हिचक लगी। लेकिन *अल्ख्वारिज़्मी* एवं *उमर खय्याम* जैसे अरब गणितज्ञों ने ऋणात्मक संख्याओं को सहर्ष स्वीकार किया और फैलाया।

भिन्नों और ऋणात्मक संख्याओं के बाद परिमेय संख्याओं का विचार एक स्वाभाविक प्रक्रिया थी। परिमेय संख्याओं संबंधी वर्तमान प्रस्तुतिकरण एवं उपयोग पिछली शताब्दी में ही विकसित हुए हैं।

5.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने अनुपात तथा समानुपात और ऐकिक विधि के बारे में पढ़ा है। इस अध्याय में, हम समानुपात और ऐकिक विधि की संकल्पना का उपयोग विचरण की संकल्पना को विकसित करने के लिए करेंगे। आप जानते हैं कि:

(1) जब कार की चाल बढ़ती है, तो दूरी पार करने में समय कम लगता है। (चाल के बढ़ने से समय में कमी आती है।)

(2) बैंक में अधिक धन जमा होता है, तो धन पर ब्याज अधिक बनता है। (धन के अधिक हो जाने से ब्याज भी अधिक बनता है।)

(3) मजदूरों की संख्या बढ़ती है, तो उसी कार्य को पूरा करने में कम समय लगता है। (मजदूरों की संख्या बढ़ने से दिनों की संख्या कम हो जाती है।)

इस प्रकार, हम देखते हैं कि कभी-कभी दो संबंधित राशियों में एक साथ वृद्धि या कमी होती है, परंतु कभी-कभी एक राशि में वृद्धि होने पर दूसरी राशि में कमी होती है। इससे *अनुक्रमानुपाती विचरण* तथा *व्युत्क्रमानुपाती विचरण* की संकल्पनाओं का ज्ञान होता है। अब हम इस अध्याय में, इन संकल्पनाओं का परिचय देंगे और इनका समय और कार्य तथा समय और दूरी से संबंधित प्रश्नों को हल करने में उपयोग करेंगे।

5.2 अनुक्रमानुपाती विचरण

मान लीजिए कि आलू का मूल्य 10 रु प्रति किग्रा है। दो किलोग्राम आलू खरीदने के लिए आपको दुगुना मूल्य व्यय करना पड़ेगा और आधा किलोग्राम आलू खरीदने के लिए आपको आधा मूल्य देना पड़ेगा। जितने अधिक आलू खरीदोगे, उतने ही अधिक रुपए लगेंगे और जितने

कम आलू खरीदेंगे, उतने ही रुपए भी कम लगेंगे; परंतु आलू की मात्रा और मूल्य का अनुपात नहीं रहेगा। दो राशियों के इस प्रकार बदलने के व्यवहार या क्रिया को. एक दूसरे के साथ *अनुक्रमानुपात में विचरते हैं*, कहते हैं।

यदि 5 किग्रा आलू का मूल्य 50 रु हो, तो 20 किग्रा आलू का क्या मूल्य होगा? अवश्य ही आप उत्तर देंगे कि 200 रु । अब प्रश्न यह है कि आपने यह उत्तर निकाला कैसे? हो सकता है कि ऐकिक विधि के प्रयोग से आपने पहले एक किग्रा और फिर बीस किग्रा आलू का मूल्य निकाला हो। तथापि, आपने यह देखा होगा कि 5 किग्रा आलू का मूल्य 50 रु है। अत: 20 किग्रा आलू का मूल्य इससे चार गुना होगा। 40 किग्रा आलू का मूल्य क्या होगा? निस्संदेह मूल्य भी 8 गुना हो जाएगा। आइए आलू की मात्रा को किग्रा में x से और इनका संगत मूल्य रुपयों में y से व्यक्त करें। नीचे दी गई सारणी में x के कुछ मान और इन मानों के लिए y के संगत मान दिए गए हैं:

आलू की मात्रा किग्रा में (x)	5	10	20	30	40	50	60
रुपयों में मूल्य (y)	50	100	200	300	400	500	600

सारणी को ध्यान से देखिए। जैसे-जैसे x का मान बढ़ता है, वैसे-वैसे y के संगत मानों का क्या होता है? क्या वे भी बढ़ते हैं? हाँ, वास्तव में ऐसा ही है। अब x के विविध मानों और इनके संगत y के मानों के लिए अनुपात $\frac{x}{y}$ पर ध्यान दीजिए। उदाहरण के लिए $\frac{5}{50}, \frac{10}{100}, \frac{20}{200}, \frac{30}{300}$ इत्यादि। आप क्या देखते हैं? क्या आपको सदा एक ही मान प्राप्त होता है? हाँ, ऐसा ही तो है। प्रत्येक बार आपको $\frac{1}{10}$ प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{x}{y}$ बदलता नहीं है, यह *अचर* है। ध्यान दीजिए कि x और y धनात्मक हैं और इसलिए $\frac{x}{y}$ हमेशा धनात्मक है।

आइए $\frac{x}{y}$ के अचर मान को k से व्यक्त करें। तब,

$$\frac{x}{y} = k$$

या $$x = ky \qquad (1)$$

ध्यान दीजिए कि k में कोई परिवर्तन नहीं होता। इसलिए, ऊपर के संबंध से यह ज्ञात हुआ कि x और y साथ-साथ बढ़ते (घटते) हैं। यदि हम दोनों चरों (x व y) में से किसी एक का मान बढ़ा दें, तो संबंध (1) के दोनों पक्षों का मान वही रखने के लिए, हमें दूसरे चर का मान भी उपयुक्त रूप से बढ़ाना पड़ेगा। यदि हम दोनों चरों (x व y) में से किसी एक का मान घटा दें, तो संबंध (1) के दोनों पक्षों का मान वही रखने के लिए, हमें दूसरे चर का मान भी उपयुक्त रूप से घटाना पड़ेगा। उदाहरण के लिए, x को दुगुना करें, तो y को भी दुगुना करना पड़ेगा; x के स्थान पर $3x$ लें, तो y के स्थान पर $3y$ लेना पड़ेगा; इत्यादि। इसी प्रकार, x का मान x का एक चतुर्थांश कम करने का अर्थ है कि y का मान भी एक चतुर्थांश कम करना होगा। इन सभी स्थितियों में हम कहते हैं कि x और y अनुक्रमानुपात में विचरते हैं।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि दो राशियों x और y को *सीधे अनुपात में* या *अनुक्रमानुपात में विचरण करता* (*vary directly*) कहते हैं, यदि

(i) x बढ़े, तो इसके संगत y का मान इस प्रकार बढ़े कि अनुपात $\frac{x}{y}$ धनात्मक और अचर हो।

(ii) x घटे, तो इसके संगत y का मान इस प्रकार घटे कि अनुपात $\frac{x}{y}$ धनात्मक और अचर हो।

आइए कुछ ऐसे उदाहरण देखें जहाँ एक राशि दूसरी के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण करती है।

उदाहरण 1: निम्न सारणी में a तथा b के मान ज्ञात कीजिए, यदि x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं:

x	10	8	a
y	15	b	24

हल: दिया हुआ है कि x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं। अतः, अनुपात $\frac{x}{y}$ अचर और धनात्मक होना चाहिए। अब, $\frac{10}{15}, \frac{8}{b}, \frac{a}{24}$ के मान समान होने चाहिए।

अतः, $$\frac{10}{15} = \frac{8}{b} = \frac{a}{24}$$

या $b = 12$ तथा $a = 16$

उदाहरण 2: एक प्रकार के 6 मी कपड़े का मूल्य 240 रु है। इस कपड़े के 2, 3, 12 और 18 मीटरों का मूल्य एक सारणी में लिखिए। क्या कपड़े की लंबाई और मूल्य अनुक्रमानुपाती विचरण करते हैं?

हल: ऐकिक विधि के प्रयोग से 2, 3, 12 व 18 मी कपड़े का मूल्य क्रमशः 80, 120, 480 व 720 रु ज्ञात किया जा सकता है। यदि हम अपनी सहज बुद्धि का प्रयोग करें, तो हम देखते हैं कि वांछित मूल्य क्रमशः 6 मी कपड़े के मूल्य का एक तिहाई, आधे, दुगुने व तिगुने होंगे।

इस प्रकार, वांछित मूल्य (रुपयों में) क्रमशः $\frac{1}{3}\times 240, \frac{1}{2}\times 240, 2\times 240$ तथा 3×240 हुए।

हम किसी भी प्रकार से बढ़ें, वांछित सारणी यह होगी:

l = *लंबाई (मीटर में)*	2	3	6	12	18
c = *मूल्य (रुपए में)*	80	120	240	480	720

क्या ये दो राशियाँ l (लंबाई) तथा c (मूल्य) अनुक्रमानुपाती विचरण करती हैं? हाँ, कारण यह है:

1. जैसे-जैसे l बढ़ती (घटती) है वैसे-वैसे ही c भी बढ़ता (घटता) है।
2. यदि हम c और l के संगत मानों के लिए अनुपात $\frac{c}{l}$ निकालें, तो $\frac{80}{2}$, $\frac{120}{3}, \frac{240}{6}, \frac{480}{12}, \frac{720}{18}$ प्राप्त होते हैं और इन सबका एक ही मान $= 40$ है।

   इस प्रकार,

$$\frac{c}{l} = 40 \text{ या } c = 40 \text{ (लंबाई)}$$

या $$\text{मूल्य} = 40 \text{ (लंबाई)}$$

संबंध मूल्य = 40 बार लंबाई के कारण हम कहते हैं कि मूल्य लंबाई के अनुक्रमानुपात (उसी या सीधे अनुपात) 40 में विचरता (या बदलता) है। क्या यहाँ लंबाई मूल्य के अनुक्रमानुपात $\frac{1}{40}$ में बदलती है?

टिप्पणी: 1. संबंध $c = 40l$ इस बात की गारंटी देता है कि मूल्य और लंबाई साथ-साथ बढ़ेंगे (घटेंगे)। सच बात तो यह है कि इसकी जाँच करने के लिए कि क्या c और l एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपात में विचरते हैं, हमें किसी धनात्मक संख्या k के लिए $c = kl$ जैसे संबंध की आवश्यकता थी। यह ज्ञात करना कि c और l एक दूसरे के साथ-साथ बढ़ते हैं या नहीं, अनावश्यक था। फिर भी यह बात पहले जाँच लेना कि हमारी राशियाँ साथ-साथ बढ़ती (घटती) हैं या नहीं, बहुत सुगम और लाभप्रद है। तथापि, यह बात ध्यान देने योग्य है कि दोनों राशियों के साथ-साथ बढ़ने (या घटने) से यह स्थिति अनुक्रमानुपाती विचरण की नहीं हो जाती, जैसा कि हल किए हुए उदाहरण 4 में दर्शाया गया है। यदि वे साथ-साथ बढ़ते (या घटते) हैं, तो हम $x = ky$ जैसे संबंध को प्राप्त करने का प्रयास करेंगे। अन्यथा हम चिंता नहीं करेंगे, क्योंकि तब यह अनुक्रमानुपाती विचरण की स्थिति नहीं होगी, जैसा कि उदाहरण 4 में हल करके दर्शाया गया है।

2. ध्यान दीजिए कि यदि दो राशियाँ अनुक्रमानुपात में विचरण करती हैं, तो एक राशि के दो मूल्यों में वही अनुपात होगा जो दूसरी राशि के संगत मूल्यों में होगा। इस प्रकार, उपरोक्त उदाहरण में $\frac{2}{3} = \frac{80}{120}, \frac{2}{18} = \frac{80}{720}$ इत्यादि।

उदाहरण 3: सात दर्जन संतरों का मूल्य 91 रु है। दस दर्जन संतरों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टत: यह अनुक्रमानुपाती विचरण की स्थिति है। जब खरीदे गए संतरों की संख्या बढ़ती है, तो उसी अनुपात में मूल्य में वृद्धि हो जाती है। मान लीजिए 10 दर्जन संतरों का मूल्य x रु है। इस सूचना को निम्न प्रकार से लिखिए:

संतरों की संख्या (दर्जन में)	7	10
मूल्य (रु में)	91	x

∴ इस समानुपात को हम लिख सकते हैं:

$$\frac{7}{91} = \frac{10}{x}$$

या $$x = \frac{910}{7}$$

या $$x = 130$$

अर्थात् 10 दर्जन संतरों का मूल्य 130 रु है।

उदाहरण 4: किसी मीनार की चोटी से एक पत्थर स्वतंत्रतापूर्वक गिरता है। गिरने में पार की हुई दूरी h और लिया गया समय t निम्न सूत्र से दिया जाता है:

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

जहाँ g एक अचर है जिसे गुरुत्वाकर्षण जनित वेग वृद्धि कहते हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) h, जबकि $t = 2$ तथा $t = 4$ ।

(ii) $\frac{h}{t}$, जबकि $t = 2$ तथा $t = 4$ ।

(iii) क्या h और t एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण करते हैं?

हल: (i) $h = \frac{1}{2} g t^2$ से, हम पाते हैं:

जब $t = 2,\ h = \frac{1}{2} g \times 2^2 = 2g$

और जब $t = 4,\ h = \frac{1}{2} g \times 4^2 = 8g$ ।

(ii) (1) से हम पाते हैं कि $\frac{h}{t} = \frac{1}{2} gt$ ।

$\therefore$ $t = 2$ के लिए, $\frac{h}{t} = \frac{1}{2} g \times 2 = g$

तथा $t = 4$ के लिए, $\frac{h}{t} = \frac{8g}{4} = 2g$

(iii) ध्यान दीजिए कि t के बढ़ने से h भी बढ़ता है, परंतु अनुपात $\frac{h}{t}$ अचर नहीं है और इसलिए h और t एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण नहीं करते हैं।

टिप्पणी: इस उदाहरण में h और t^2 एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण करते हैं।

उदाहरण 5: यदि कागज के 6 पत्रों का भार 45 ग्राम हो, तो ऐसे कितने पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा?

हल: सहज बुद्धि कहती है कि पत्र जितने अधिक होंगे, भार भी उतना ही अधिक होगा। और फिर पत्रों की संख्या और उनके भार में वृद्धि होगी भी आनुपातिक (अर्थात् दोनों एक ही अनुपात में बदलेंगे)। इसलिए ये दोनों राशियाँ एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपात में बदलती हैं और इनके मध्य नीचे जैसा कोई संबंध होना चाहिए:

$$\text{पत्रों की संख्या} = k \times (\text{पत्रों का भार ग्राम में})$$

जबकि k कोई धनात्मक संख्या है। आइए, अब k का मान निकालें। हम जानते हैं कि 6 पत्रों का भार 45 ग्रा है। अतः, यह आवश्यक है कि

$$6 = k \times 45$$

या
$$k = \frac{2}{15}$$

अतः, पत्रों की संख्या $= \frac{2}{15} \times$ (पत्रों का भार ग्राम में)

अब मान लीजिए कि x पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किलोग्राम या 1500 ग्रा है।

इसलिए,
$$x = \frac{2}{15} \times 1500 = 200$$

अतः, 200 पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किलोग्राम होगा।

वैकल्पिकतः, हम इस प्रश्न को इस प्रकार भी हल कर सकते हैं। हम निम्नलिखित सारणी बनाते हैं:

पत्रों की संख्या	6	x
भार (ग्राम में)	45	1500

स्मरण रहे $1\frac{1}{2}$ किलोग्राम = 1500 ग्रा। इस प्रकार,

$$\frac{6}{45} = \frac{x}{1500}$$

या
$$x = 1500 \times \frac{6}{45} = 200$$

उदाहरण 6: एक कार 48 लीटर पेट्रोल में 432 किलोमीटर चलती है। 20 लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी चलेगी?

हल: पहले तो हम इस बात पर ध्यान दें कि जितना पेट्रोल कम लगेगा, तय की गई दूरी (किमी में) भी उतनी ही कम होगी। साथ ही, यह अनुक्रमानुपाती विचरण की स्थिति है। अब मान लीजिए 20 लीटर पेट्रोल में यह कार x किलोमीटर चलेगी। आइए, अब इस सूचना को एक सारणी में लिखें।

पेट्रोल (ली में)	48	20
दूरी (किमी में)	432	x

अब चूँकि पेट्रोल की भिन्न-भिन्न मात्राओं में अनुपात वही है जो संगत किलोमीटरों में है, अत:

$$48 : 20 = 432 : x$$

इस समानुपात से, x का मान $\dfrac{20 \times 432}{48}$ या 180 प्राप्त होता है।

अत:, 20 लीटर पेट्रोल में कार 180 किलोमीटर चलेगी।

उदाहरण 7: बिजली का एक खंभा 24 मीटर ऊँचा है और उसकी छाया 20 मीटर है। समान स्थितियों में, उस पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 15 मीटर है।

हल: स्पष्ट है कि यह अनुक्रमानुपात की स्थिति है।

माना कि पेड़ की ऊँचाई x मीटर है।

$\therefore$ $$24 : x = 20 : 15$$

या $$24 \times 15 = 20 \times x$$

या $$20x = 360$$

या $$x = 18$$

अर्थात् पेड़ की ऊँचाई 18 मीटर है।

उदाहरण 8: एक रेलगाड़ी $1\frac{1}{4}$ घंटे में 95 किलोमीटर की दूरी तय करती है। यह मान कर कि रेलगाड़ी की चाल एकसमान रहती है, ज्ञात कीजिए उसी गाड़ी को 266 किलोमीटर की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा।

हल सहज बुद्धि कहती है कि चूँकि चाल एकसमान है, अतः जितनी अधिक दूरी यात्रा में होगी, समय भी उतना ही अधिक लगेगा। इसलिए ये दोनों राशियाँ एक दूसरे से अनुक्रमानुपाती विचरण में हैं, और इसीलिए

$$\text{तय की हुई दूरी} = k\ (\text{लिया गया समय})$$

जहाँ k कोई धनात्मक संख्या है। हम जानते हैं कि 75 मिनट में 95 किमी की दूरी तय होती है। अतः, अवश्य ही

$$95 = k \times 75$$

या $$k = \frac{95}{75}$$

इसलिए, $$266 = \frac{95}{75} \times (\text{लिया गया समय})$$

या $$\text{लिया गया समय} = \frac{266 \times 75}{95}$$

$$= 210$$

इस प्रकार, 266 किमी की दूरी 210 मिनट, अर्थात् 3 घंटे 30 मिनट में तय की जाएगी।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्न सारणी में यदि x और y एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण में हैं, तो रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i)

x	7	9	13	–	25
y	21	–	–	63	–

(ii)

x	2.5	5	7.5	10	–	12
y	–	5	–	–	11	–

(iii)

x	0.1	0.5	2	–	32
y	–	–	8	32	–

2. हाइड्रोजन गैस से भरे एक गुब्बारे द्वारा ऊँचा उठना समय के साथ अनुक्रमानुपाती है। निम्न सारणी में गुब्बारे के समय और ऊँचाई (मीटरों में) के बारे में कुछ प्रेक्षण दिए जा रहे हैं। इस सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

समय (मिनटों में)	3	4	–	25	–
गुब्बारे की ऊँचाई (मीटरों में)	–	48	84	–	1860

3. समान मूल्य की 15 टिकटों का मूल्य 18 रु है। 36 रु में उसी मूल्य की कितनी टिकटें खरीदी जा सकती हैं?

4. एक मशीन 5 घंटे में 120 औजारों को काटती है। 20 घंटे में वह कितने औजार काटेगी?

5. 1000 रु की बिक्री पर एक एजेंट 73 रु का कमीशन प्राप्त करता है। 100 रु की बिक्री पर उसे कितना कमीशन मिलेगा?

6. 5 बच्चों के प्रत्येक समूह के लिए पार्टी में मृदु पेय की 8 बोतलें दी जाती हैं। यदि पार्टी में 40 बच्चे उपस्थित हों, तो कितनी बोतलें दी जाएँगी?

7. यदि कागज के 500 पत्रों की मोटाई 3.5 सेमी है, तो इस कागज के 275 पत्रों की मोटाई ज्ञात कीजिए।

8. यदि एक विशेष प्रकार की 93 मी लंबी प्लास्टिक शीट का मूल्य 1395 रु है, तो इसी प्रकार की 105 मी लंबी प्लास्टिक शीट का क्या मूल्य होगा?

9. सलमा आधा घंटे में 540 शब्दों को टाइप करती है। 6 मिनट में वह कितने शब्द टाइप करेगी?

5.3 व्युत्क्रमानुपाती विचरण

हमने देखा कि अनुक्रमानुपाती विचरण की स्थिति में राशियाँ उसी अनुपात में साथ-साथ बढ़ती या घटती हैं। कभी-कभी एक राशि के बढ़ने से दूसरी राशि घटने लगती है और पहली के घटने पर दूसरी में संगत वृद्धि हो जाती है। उदाहरण के लिए, यदि 4 व्यक्ति एक काम को 6 दिन में कर सकते हैं और यदि हम इस काम पर एक ही व्यक्ति लगाएँ, तो वह इसे करने में चौगुना समय लगाएगा। दूसरे शब्दों में, एक व्यक्ति इस काम को 24 दिन में करेगा। इसी प्रकार, 1, 2, 4, 6, 8 या 12 व्यक्ति इस काम को करने में जितने दिन लगाएँगे

वह नीचे की सारणी में दिए गए हैं:

व्यक्तियों की संख्या	1	2	4	6	8	12
दिनों की संख्या	24	12	6	4	3	2

इस प्रकार, जैसे-जैसे काम पर लगाए गए व्यक्तियों की संख्या बढ़ती है, वैसे-वैसे ही लगने वाले दिनों की संख्या कम होती जाती है। इसे ऐसे भी कहा जा सकता है कि जैसे-जैसे व्यक्तियों की संख्या घटती है, दिनों की संख्या बढ़ती है।

अनुक्रमानुपाती विचरण की दशा में हमने देखा कि प्रत्येक पंक्ति के किन्ही दो पदों (अर्थात् एक राशि के दो मानों) में अनुपात ठीक वही था जो दूसरी पंक्ति के (दूसरी राशि के मानों) संगत पदों में था। आइए, देखें कि यहाँ क्या हो रहा है। उपरोक्त सारणी में पहली पंक्ति के दूसरे और तीसरे पदों का अनुपात 2 : 4 लीजिए। दूसरी पंक्ति के संगत पदों 12 और 6 का अनुपात 4 : 2 है। इसी प्रकार, पहली पंक्ति के दूसरे और अंतिम पदों में अनुपात 2 : 12 है, जबकि दूसरी पंक्ति के संगत पदों का अनुपात 12 : 2 है। आप क्या देखते हैं? अन्य युग्मों को भी जाँचिए। क्या आप देख रहे हैं कि प्रत्येक बार अनुपात एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं? ध्यान दीजिए कि इसका आशय है कि दो राशियों के मानों का गुणनफल अचर है। उदाहरणतः, उपर्युक्त सारणी में $1 \times 24 = 2 \times 12 = 4 \times 6 = \ldots = k$ (माना)है। दो राशियाँ x और y एक दूसरे के साथ *व्युत्क्रमानुपाती विचरण (vary inversely) करती हैं*, यदि किसी अचर धनात्मक संख्या k के लिए इनके बीच $xy = k$ जैसा संबंध हो।

इस बात को हम ऐसे भी कह लेते हैं कि x, y के साथ और y, x के साथ व्युत्क्रमानुपाती विचरण करता है। ध्यान दीजिए कि यदि $xy = k$ हो और यदि x के मानों x_1, x_2 के लिए y के संगत मान y_1, y_2 हों, तो

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 \ (= k) \text{ होगा, जिससे कि}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

याद कीजिए अनुक्रमानुपाती विचरण की दशा में हमें $\frac{x}{y} = k$ जैसा संबंध प्राप्त हुआ था।

उदाहरण 9: लड़कियों के एक छात्रावास में 50 लड़कियों के लिए 40 दिन की भोजन सामग्री है। यदि 30 और लड़कियाँ इस छात्रावास में आ जाएँ, तो भोजन सामग्री कितने दिन चलेगी?

हल: ध्यान दीजिए कि लड़कियाँ जितनी अधिक होंगी, भोजन सामग्री उतने ही कम दिन चलेगी। इसलिए यह व्युत्क्रमानुपाती विचरण हुआ। लड़कियों की संख्या क्रमश: 50 तथा (50 + 30 =) 80 है। जब लड़कियाँ 80 हो जाती हैं, तब यदि भोजन सामग्री x दिन चले, तो निम्न सारणी बनेगी:

लड़कियों की संख्या	50	80
दिनों की संख्या	40	x

चूँकि विचरण व्युत्क्रमानुपाती है, अत:

$$50 \times 40 = 80 \times x$$

यहाँ से x का मान 25 प्राप्त हुआ।

अत:, भोजन सामग्री 25 दिनों तक चलेगी।

उदाहरण 10: तापमान स्थित रहे तो किसी गैस का आयतन दबाव की तुलना में व्युत्क्रमानुपात में विचरण करता है। यदि गैस का आयतन 270 मिमी दबाव पर 840 घन सेमी हो, तो 315 मिमी के दबाव पर गैस का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि यह मानकर चलें कि गैस का तापमान समस्त प्रयोग में स्थिर रहता है।

हल: यहाँ आयतन और दबाव व्युत्क्रमानुपात में विचरण करते हैं। मान लीजिए कि आयतन x घन सेमी है। तब,

$$270 \times 840 = 315 \times x$$

या
$$x = \frac{270 \times 840}{315} = 720$$

अर्थात् 315 मिमी के दबाव पर गैस का आयतन 720 घन सेमी है।

5.4 समय और कार्य, समय और दूरी

हमने देखा है कि समय और कार्य, समय और दूरी के प्रश्नों को हल करने में अनुक्रमानुपाती विचरण और व्युत्क्रमानुपाती विचरण की संकल्पनाएँ बहुत उपयोगी हैं। अब हम समय और कार्य तथा समय और दूरी पर कुछ और प्रश्न हल करेंगे।

उदाहरण 11: 48 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से चल कर एक कार कोई दूरी 10 घंटे में तय करती है। उसकी चाल को कितना बढ़ा दें कि वह इसी दूरी को केवल 8 घंटे में तय कर ले?

हल: माना कि दूसरी दशा में कार की चाल x किलोमीटर प्रति घंटा है। तब निम्न सारणी बनेगी:

घंटों की संख्या	10	8
चाल (किमी प्रति घंटा)	48	x

ध्यान दीजिए कि चाल जितनी अधिक होगी, समय उतना ही कम लगेगा। अत:, घंटों की संख्या और चाल एक दूसरे के साथ व्युत्क्रमानुपाती विचरण करते हैं। अत:,

$$10 \times 48 = 8 \times x$$

या $$x = 60$$

अत:, चाल में अभीष्ट वृद्धि = (60 − 48) किमी प्रति घंटा = 12 किमी प्रति घंटा

उदाहरण 12: 1648 व्यक्ति किसी पुल को बनाने में कितने दिन लगाएँगे, यदि 721 व्यक्ति उसी पुल को 48 दिनों में बना सकते हैं?

हल: मान लीजिए पुल बनाने के लिए अभीष्ट दिनों की संख्या x है। तब पुल बनाने की उचित सारणी निम्न बनेगी :

दिनों की संख्या	48	x
आवश्यक व्यक्तियों की संख्या	721	1648

स्पष्ट है कि जितने अधिक व्यक्ति लगेंगे, पुल भी उतना ही जल्दी बनेगा। इसलिए दिनों की संख्या और व्यक्तियों की संख्या एक दूसरे के साथ व्युत्क्रमानुपाती विचरण में हैं।

∴ हम निम्न समानुपात पाते हैं:

$$1648 : 721 = 48 : x$$

(दूसरे अनुपात के पदों को व्युत्क्रम ढंग से लिखने पर, अर्थात् $48 : x$ को $x : 48$ के स्थान पर लिखने पर।)

या $$721 \times 48 = 1648 \times x$$

या $$x = \frac{721 \times 48}{1648} = 21$$

अर्थात् 1648 व्यक्ति 21 दिन में कार्य पूरा कर सकेंगे।

उदाहरण 13: 315 मी लंबी एक रेलगाड़ी 54 किमी/घंटा की चाल से जा रही है। एक खंभे को पार करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल: रेलगाड़ी की लंबाई मीटर में दी हुई है। अतः, हम उसकी चाल को मी/सेकंड में बदल लेंगे।

54 किमी = 54000 मी

1 घंटा = 3600 सेकंड

अतः, चाल $\frac{54000}{3600}$ मी/सेकंड =15 मी/सेकंड

खंभे को पार करने में रेलगाड़ी को अपनी लंबाई के बराबर, अर्थात् 315 मी दूरी पार करनी पड़ेगी। मान लीजिए अभीष्ट समय x सेकंड है। हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है:

दूरी (मी में)	15	315
समय (सेकंड में)	1	x

स्पष्टतः, यह अनुक्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

अतः,
$$\frac{15}{1}=\frac{315}{x}$$

या
$$x=\frac{315}{15}=21$$

अतः, खंभा पार करने में रेलगाड़ी को 21 सेकंड लगेंगे।

उदाहरण 14: एक टेंपो 36 किमी/घंटा की चाल से चलता है। 20 सेकंड में वह कितनी दूरी चलेगा?

हल: 36 किमी = 36000 मी

1 घंटा = 3600 सेकंड

मान लीजिए कि अभीष्ट दूरी x मी है। अतः, हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है:

समय (सेकंड में)	3600	20
दूरी (मीटर में)	36000	x

यह अनुक्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

$$\therefore \quad \frac{3600}{36000} = \frac{20}{x}$$

या $$x = \frac{20 \times 36000}{3600} = 200$$

इस प्रकार, 20 सेकंड में पार की गई दूरी 200 मीटर है।

उदाहरण 15: 60 किमी / घंटा की चाल से चलकर एक रेलगाड़ी किसी दूरी को 3.5 घंटे में पार कर लेती है। उसी दूरी को 80 किमी / घंटा की चाल से चल कर रेलगाड़ी कितने समय में तय करेगी?

हल: मान लीजिए कि अभीष्ट समय x घंटा है। हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है:

चाल (किमी/घंटा में)	60	80
लिया गया समय (घंटों में)	3.5	x

स्पष्टत:, यह व्युत्क्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

अत:, $60 \times 3.5 = 80 \times x$

या $$x = \frac{60 \times 3.5}{80} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

अत:, 80 किमी / घंटा की चाल से वही दूरी तय करने में रेलगाड़ी $2\frac{5}{8}$ घंटे लेगी।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित में से कौन-सी राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण करती हैं?

(i) 12.00 रु में खरीदी जा सकने वाली पेंसिलों की संख्या x तथा इनका प्रति पेंसिल मूल्य y । (इस स्थिति में पेंसिलों का मूल्य 25 पैसे का कोई गुणज मान लीजिए)

(ii) एक दीवार बनाने पर लगाए गए व्यक्तियों की संख्या x और दीवार बनने में लगने वाला समय y ।

(iii) बस से की गई यात्रा की दूरी x और टिकट का मूल्य y ।

2. u और v एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण करते हैं। जब $u = 10$ है, तो $v = 15$ है। u और v के संगत मानों के लिए, निम्न में से कौन–सा युग्म संभव नहीं है?

(i) 2 और 3 (ii) 8 और 12

(iii) 15 और 20 (iv) 25 और 37.5

3. x और y एक दूसरे के साथ व्युत्क्रमानुपाती विचरण करते हैं। जब $x = 10$ है, तो $y = 6$ है। निम्न में से कौन-सा युग्म x और y के संगत मानों के लिए संभव नहीं है?

(i) 12 और 5 (ii) 15 और 4

(iii) 25 और 2.4 (iv) 45 और 1.3

4. एक रेलगाड़ी 50 किमी / घंटा की औसत चाल से चल रही है। 12 मिनट में वह कितनी दूरी तय करेगी?

5. एक साइकिल सवार 6 किमी / घंटा की औसत चाल से चल कर 19.5 किमी की दूरी को कितने समय में तय कर लेगा?

6. एक कार को 135 किलोमीटर की दूरी तय करने में 10 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होती है। 216 किलोमीटर की दूरी तय करने में कार को कितने पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

7. एक बैलगाड़ी 18 किमी की दूरी $4\frac{1}{2}$ घंटे में तय करती है। बैलगाड़ी की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

8. बीस पंप एक हौज को 12 घंटे में खाली कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि ऐसे 45 पंप उस हौज को कितने समय में खाली करेंगे।

9. 1800 व्यक्ति एक भवन का निर्माण 40 दिन में कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि उसी भवन को 24 दिन में बनाने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए।

10. खाने की वस्तुओं का एक भंडार 500 व्यक्तियों के लिए 8 सप्ताह के लिए पर्याप्त है। वही भंडार 400 व्यक्तियों के लिए कितने दिनों के लिए पर्याप्त होगा?

11. शालू 12 किमी / घंटा की औसत चाल से साइकिल पर स्कूल जाती है। वह 20 मिनट में स्कूल पहुँच जाती है। यदि वह 15 मिनट में स्कूल पहुँचना चाहे, तो उसकी औसत चाल क्या होनी चाहिए?

12. एक दुकानदार के पास ठीक इतनी राशि है कि वह इससे ऐसी 52 साइकिलें खरीद सकता है जिनमें से प्रत्येक का मूल्य 525 रु है। यदि साइकिल का मूल्य 21.00 रु प्रति साइकिल बढ़ जाए, तो उसी राशि से वह कितनी साइकिलें खरीद पाएगा?

13. एक ठेकेदार ने एक क्रीड़ांगन के कुछ भाग को 9 महीने में पूरा करने का ठेका लिया। उसके पास 560 मजदूर थे। उससे कहा गया कि वह इस काम को 7 महीने में ही समाप्त कर दे। उसको कितने और मजदूर काम पर रखने पड़ेंगे?

14. निम्न सारणी में दबाव और आयतन के आँकड़े दिए गए हैं, जो स्थिर तापमान पर किसी गैस पर लिए गए हैं:

दबाव (सेमी में)	75	80	–	112.50	–
आयतन (मिलीलीटर में)	12	–	10	–	15

यह मानते हुए कि P, V के साथ व्युत्क्रमानुपाती विचरण करता है, उपरोक्त सारणी में रिक्त पदों को ज्ञात कीजिए।

15. निम्न सारणी में, अचर दबाव रखकर, आयतन V और निरपेक्ष तापमान T के प्रक्षेण दिए गए हैं:

आयतन (V)	10	12	15	–	–
निरपेक्ष तापमान (T)	300	–	–	750	375

यह मानकर कि V, T के अनुक्रमानुपाती है, उपरोक्त सारणी में रिक्त पदों को ज्ञात कीजिए।

16. 50 व्यक्ति किसी कार्य को 18 दिन में कर सकते हैं। उसी कार्य को 75 व्यक्ति कितने दिन में कर सकेंगे?

17. यदि 6 व्यक्ति एक मकान में बिजली के तार आदि लगाने में 7 दिन लगाते हों, तो 21 व्यक्ति इसी काम को कितने दिन में कर लेंगे?

18. 8 घंटे प्रति दिन लिखकर अनु एक पुस्तक की प्रति 18 दिन में बना लेती है । इस काम को 12 दिन में समाप्त करने के लिए उसे कितने घंटे प्रति दिन लिखना पड़ेगा?

19. 270 मीटर लंबी एक मालगाड़ी 40.5 किमी/घंटा की चाल से जा रही है। वह एक पेड़ को कितनी देर में पार कर लेगी?

20. एक रेलगाड़ी 36 किमी / घंटा की चाल से चल रही है। यदि वह एक खंभे को 25 सेकंड में पार कर जाए, तो उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

21. 450 मी लंबी एक रेलगाड़ी एक खंभे को $22\frac{1}{2}$ सेकंड में पार कर जाती है। गाड़ी की चाल किमी/घंटा में ज्ञात कीजिए।

22. 250 मी लंबी एक रेलगाड़ी 55 किमी / घंटा की चाल से चल रही है। 520 मी लंबे एक प्लेटफार्म को वह कितने समय में पार कर लेगी?

[*संकेत:* रेलगाड़ी द्वारा प्लेटफार्म को पार करने में चली दूरी = रेलगाड़ी की लंबाई + प्लेटफार्म की लंबाई]

23. एक रेलगाड़ी 80 किमी / घंटा की चाल से चल कर 4.5 घंटे में कुछ दूरी को पार कर जाती है। उतनी ही दूरी को 3 घंटे में पार करने के लिए रेलगाड़ी की चाल क्या होनी चाहिए?

याद रखने योग्य बातें

1. दो राशियों x और y को एक दूसरे के साथ अनुक्रमानुपाती विचरण में कहते हैं, यदि वे इस प्रकार एक साथ बढ़ें (घटें) कि इनके संगत मानों का अनुपात अचर रहे। दूसरे शब्दों में, x और y का विचरण अनुक्रमानुपाती होता है, यदि $\frac{x}{y} = k$ हो, जहाँ k कोई धनात्मक अचर संख्या है।

2. दो राशियों x और y को एक दूसरे के साथ व्युत्क्रमानुपाती विचरण में कहते हैं, यदि x के बढ़ने से y इस प्रकार घटे (और विलोमतः भी) कि इनके संगत मानों का गुणनफल अचर रहे। अर्थात् x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण करते हैं, यदि $xy = k$ हो, जहाँ k एक धनात्मक अचर संख्या है।

3. समय, दूरी और चाल के बीच निम्न संबंध है:

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

अध्याय 6

6.1 भूमिका

छठी कक्षा में, आपने प्रतिशतता के बारे में सीखा था। स्मरण कीजिए कि वह भिन्न जिसका हर 100 है, *प्रतिशत* कहलाती है। *प्रतिशत* (*per cent*) लैटिन शब्द *Per centum* का संक्षिप्त रूप है, जिसका अर्थ है 'प्रति सैकड़ा' या 'सौवाँ भाग' और इसे प्रतीक % से दर्शाते हैं।

इस प्रकार, $\frac{10}{100} = 10 \times \frac{1}{100} = 10\%$

$$\frac{23}{50} = \frac{23 \times 2}{50 \times 2} = \frac{46}{100} = 46 \times \frac{1}{100} = 46\%$$

इस अध्याय में, हम प्रतिशत के कुछ और प्रश्न हल करेंगे। प्रतिशत की संकल्पना का हम लाभ और हानि के प्रश्नों को भी हल करने में उपयोग करेंगे। इसके बाद, हम साधारण ब्याज, समय, ब्याज की दर और मूलधन के एक सूत्र से भी अवगत कराएँगे और सूत्र पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे।

6.2 प्रतिशत पर कुछ प्रश्न

कक्षा छः में, हम प्रतिशत पर कुछ प्रश्नों को हल करना, पहले से ही सीख चुके हैं। इसी अध्ययन को जारी रखने और इसमें अधिक विस्तार से जाने के लिए हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: किसी संख्या का 23%, 46 है। वह संख्या बताइए।

हल: माना संख्या x है।

$$\therefore\ x \text{ का } 23\% = 46$$

या

$$\frac{23}{100} \times x = 46$$

या $$x = \frac{46 \times 100}{23} = 200$$

अत:, वह संख्या 200 है।

उदाहरण 2: एक परीक्षा में नीता ने 372 अंक प्राप्त किए। यदि उसे 62% अंक प्राप्त हुए हों, तो अधिकतम अंक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए अधिकतम अंक x हैं।

नीता के अंक $= x$ का 62%

नीता ने 372 अंक प्राप्त किए।

$\therefore$ x का 62% = 372

या $$\frac{62x}{100} = 372$$

या $$x = \frac{372}{62} \times 100 = 600$$

अत:, अधिकतम अंक 600 हैं।

उदाहरण 3: एक चुनाव में एक उम्मीदवार को कुल वैध मतों का 60% प्राप्त हुआ। कुल मतों के 15% अवैध घोषित हुए। यदि कुल मतों की संख्या 500000 हो, तो उम्मीदवार के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: अवैध मतों की कुल संख्या = 500000 का 15%

$$= \frac{15}{100} \times 500000 = 75000$$

$\therefore$ डाले गए वैध मतों की कुल संख्या = 500000−75000

= 425000

उम्मीदवार के पक्ष में डाले गए वैध मतों का प्रतिशत = 60%

अत:, उम्मीदवार के पक्ष में डाले गए वैध मतों की संख्या

= 425000 का 60%

$$= 425000 \times \frac{60}{100}$$

= 255000

अत:, उम्मीदवार के पक्ष में डाले गए वैध मत 255000 हैं।

प्रश्नावली 6.1

1. राशि b का मान ज्ञात कीजिए, यदि

   (i) b का 3%, 9 रु हो　　　　(ii) b का $\frac{1}{2}\%$, 50 रु हो।

   (iii) b का 3.4%, 68 रु हो।

2. एक व्यक्ति बचत बैंक खाते में 600 रु प्रति माह जमा करता है। यदि यह धन उसकी मासिक आय का 15% है, तो उसकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।

3. गोवांग पूरे वर्ष में 216 दिन पाठशाला गया। यदि उसकी पाठशाला में उपस्थिति 90% रही हो, तो ज्ञात कीजिए कि इस पूरे वर्ष में पाठशाला कुल कितने दिन खुली।

4. एक नगर की जनसंख्या प्रति वर्ष 5% बढ़ जाती है। वर्ष 1999 से वर्ष 2000 तक जनसंख्या 8820 बढ़ी। नगर की जनसंख्या 1999 में क्या थी?

5. एक परीक्षा में सुधा ने 504 अंक प्राप्त किए। यदि उसे कुल अंकों के 63% अंक प्राप्त हुए हों, तो कुल अंक ज्ञात कीजिए।

6. किशन अपनी आय का 30% भोजन पर व्यय करता है और अपनी आय का 3% एक धार्मिक संस्था को दान दे देता है। एक विशेष महीने में उसने इन दोनों मदों पर 2310 रु व्यय किए। उसकी उस महीने की कुल आय ज्ञात कीजिए।

7. किसी पाठशाला में विद्यार्थियों की संख्या में 8% की बढ़ोतरी हुई। यदि विद्यार्थियों की संख्या में हुई कुल बढ़ोतरी 160 हो, तो पाठशाला में विद्यार्थियों की मूल संख्या ज्ञात कीजिए। बढ़ने के पश्चात् विद्यार्थियों की कुल संख्या भी ज्ञात कीजिए।

8. किसी पाठशाला में 60% विद्यार्थी लड़कियाँ हैं। यदि पाठशाला में कुल लड़कियों की संख्या 690 हो, तो पाठशाला में कुल विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए। पाठशाला में लड़कों की संख्या भी ज्ञात कीजिए।

9. एक फुटबाल टीम ने एक वर्ष में जितने मैच खेले, उनके 40% जीत लिए। यदि वह टीम कुल 12 मैचों में हारी और कोई भी मैच अनिर्णीत (ड्रा) नहीं रहा, तो ज्ञात कीजिए कि उसने पूरे वर्ष में कुल कितने मैच खेले।

   [***संकेत:*** मैच हारे = कुल मैचों का (100 − 40)%]

10. किसी विशेष दिन पाठशाला के कुल विद्यार्थियों के 80% विद्यार्थी पिकनिक पर नहीं गए। यदि 240 विद्यार्थी पिकनिक पर गए, तो उस पाठशाला में कुल विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

6.3 लाभ और हानि

पिछली कक्षाओं में आपने लाभ और हानि के संबंध में पढ़ा है। यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य (वि.मू. या S.P.) उसके क्रय मूल्य (क्र.मू. या C.P.) से अधिक है, तो हम कहते हैं कि *लाभ* (*Profit*) हुआ है। इसके विपरीत यदि विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम है, तब हम कहते हैं कि *हानि* (*Loss*) हुई है।

इस प्रकार,

लाभ = वि.मू. - क्र.मू., यदि वि.मू. > क्र.मू.

हानि = क्र.मू. - वि.मू., यदि क्र.मू. > वि.मू.

यह ध्यान देने योग्य है कि वस्तुओं को खरीदने के लिए दाम के अतिरिक्त फुटकर विक्रेता को माल ढोने, दुकान का किराया इत्यादि पर भी व्यय करना पड़ता है। ये सभी व्यय *उपरिव्यय* (*overhead*) नामक शीर्षक के अंतर्गत आते हैं और वस्तु के क्रय मूल्य का ही एक भाग होते हैं । माना कोई फुटकर विक्रेता 3 दर्जन क्रिकेट की गेंदें 81 रु में मोल लेता है और उसे 9 रु माल ढोने के देने पड़ते हैं। इस प्रकार, क्रिकेट की तीन दर्जन गेंदों का वास्तविक क्रय मूल्य 90 रु होगा।

अतः, *क्रय मूल्य में उपरिव्यय भी सम्मिलित किया जाता है।*

मान लीजिए कोई दुकानदार एक कूलर को 2200 रु में मोल लेकर उसको ठीक कराने में 300 रु व्यय करता है। वह उसे 3000 रु में बेच देता है। इस प्रकार, उसे (3000 - 2500) रु = 500 रु का लाभ होता है। इसके विपरीत यदि वह कूलर को 2200 रु में बेचता है, तो उसे (2500 - 2200) रु = 300 रु की हानि होती है।

क्योंकि लाभ या हानि सदैव पहली लागत (अर्थात् क्रय मूल्य जिसमें उपरिव्यय शामिल है) पर होती है, इसलिए प्रायः लाभ या हानि को क्र.मू. के प्रतिशत के रूप में प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार, यदि कूलर को 3000 रु में बेचा जाए, तो दुकानदार का लाभ $\left(\frac{500}{2500}\times 100\%\right)$ या 20% होगा।

इसी प्रकार, यदि कूलर को 2200 रु बेचा जाए, तो दुकानदार को $\left(\frac{300}{2500}\times 100\right)$ या 12% की हानि होगी।

इस प्रकार, हम देखते हैं:

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

और
$$\text{हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

आइए, अब कुछ उदाहरण लेकर इनको स्पष्ट करें।

उदाहरण 4: एक फुटकर विक्रेता एक घड़ी को 335 रु में खरीदता है और घड़ी के फीते को 15 रु और व्यय करके महंगे फीते से बदल देता है। यदि वह घड़ी को 400 रु में बेचे, तो उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल: नए फीते सहित घड़ी का क्रय मूल्य = 335 रु + 15 रु = 350 रु

घड़ी का वि.मू. = 400 रु

∴ लाभ = (400-350) रु = 50 रु (वि.मू. > क्र.मू.)

∴ $$\text{लाभ प्रतिशत} = \left(\frac{50}{350} \times 100\right) = 14\frac{2}{7}$$

अत: $$\text{लाभ} = 14\frac{2}{7}\%$$

उदाहरण 5: किसी साइकिल को 1536 रु में बेचने पर गुरदीप को 20% की हानि होती है। साइकिल का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: वि.मू. = 1536 रु, हानि = 20%

माना क्रय मूल्य = 100 रु है।

अत:, हानि = 100 रु का 20% = 20 रु

∴ वि.मू. = 100 रु − 20 रु = 80 रु

यदि वि.मू. 80 रु है, तो क्र.मू. 100 रु है।

∴ यदि वि.मू. 1536 रु है, तो क्र.मू. $\left(\frac{100}{80} \times 1536\right)$ रु

= 1920 रु

इस प्रकार, साइकिल का क्रय मूल्य 1920 रु है।

उदाहरण 6: देवी ने एक मकान 452000 रु में खरीदा और उसे ठीक कराने में 28000 रु व्यय किए। उसे मकान को 468000 रु में बेचना पड़ा। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल: क्रय मूल्य में उपरिव्यय भी शामिल है।

अतः, क्र.मू. = (452000 + 28000) रु

= 480000 रु

विक्रय मूल्य = 468000 रु

चूँकि वि.मू. < क्र.मू., अतः हानि = क्र.मू - वि.मू.

= 480000 रु - 468000 रु

= 12000 रु

$$\text{हानि } \% = \left(\frac{12000}{480000}\times 100\right) = \frac{5}{2}$$

$$\text{अतः, हानि} = \frac{5}{2}\%$$

उदाहरण 7: हरीश ने एक पुराना टाइपराइटर 1200 रु में खरीदा और 200 रु उसे ठीक कराने में व्यय किए। उसने उसे 1680 रु में बेचा। उसका लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। उसका लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

हल: ठीक कराने के बाद टाइपराइटर का क्र.मू. = (1200 + 200) रु

= 1400 रु

वि.मू. = 1680 रु

चूँकि वि.मू. > क्र.मू., अतः लाभ = वि.मू. - क्र.मू.

= 1680 रु - 1400 रु

= 280 रु

पुनः,
$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}}\times 100$$

$$= \frac{280}{1400}\times 100 = 20$$

$\therefore$ लाभ = 20%

उदाहरण 8: किसी कोट को 630 रु में बेचने पर दुकानदार को 5% का लाभ होता है। कोट का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ वि.मू. = 630 रु, लाभ 5% तथा क्र.मू. = ?

माना कोट का क्रय मूल्य 100 रु है।

$\therefore$ लाभ = 5 रु

$\therefore$ कोट का वि.मू. = 105 रु

यदि कोट का वि.मू. 105 रु है, तो क्र.मू. = 100 रु

$\therefore$ यदि कोट का वि.मू. 1 रु, तो क्र.मू. $= \dfrac{100}{105}$ रु

$\therefore$ यदि कोट का वि.मू. 630 रु है, तो क्र.मू. $= \dfrac{100}{105} \times 630$ रु

$= 600$ रु

अतः, कोट का क्र.मू. 600 रु है।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए (जहाँ संभव हो):

खरीद मूल्य	*उपरिव्यय*	*क्रय मूल्य*	*विक्रय मूल्य*	*लाभ*	*हानि*	*लाभ %*	*हानि %*
(i) 370 रु	80 रु	–	–	90 रु	–	–	–
(ii) [illegible]		3100 रु	–	–	62 रु	–	–
(iii) 28000 रु	2000 रु	–	36000 रु	–	–	–	–
(iv) –	500 रु	900 रु	–	–	–	8	–
(v) 240 रु	10 रु	–	–	–	–	–	6

2. एक पुस्तक विक्रेता ने एक पुस्तक को 15 रु में खरीदा और उसकी जिल्द कराने में 5 रु व्यय किए और फिर उसने पुस्तक को 24 [illegible] में बेचा। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

3. जोशी ने एक पुरानी कार 70000 रु में खरीदी और उसकी मरम्मत और पेंटिंग में 5000 रु व्यय किए। उसने बाद में कार को 67500 रु में बेचा। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

4. एक व्यापारी एक कलाई घड़ी को 225 रु में खरीदता है और उसे ठीक कराने में 15 रु व्यय करता है। यदि उस घड़ी को वह 300 रु में बेचता है, तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

5. एक फुटकर विक्रेता 1200 रु में एक कूलर खरीदता है और उसकी ढुलाई पर 40 रु व्यय करता है। यदि वह कूलर को 1550 रु में बेचे, तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

6. करीम ने 20 रु प्रति दर्जन के हिसाब से 150 दर्जन पेंसिलें खरीदीं। उसका उपरिव्यय 200 रु था। उसने प्रत्येक पेंसिल 2.40 रु के हिसाब से बेच दी। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

7. 990 रु में एक मेज को बेचने पर व्यापारी को 10% का लाभ होता है। मेज का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. जॉन ने एक टी.वी. 10240 रु में बेच कर 20% की हानि उठाई। टी.वी. का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. एक बाल्टी को 240 रु में बेचने पर एक लुहार को 20% की हानि उठानी पड़ती है। यदि वह उसे 360 रु में बेचे, तो उसे कितना लाभ या हानि होगी?

10. हरीश ने एक साइकिल 960 रु में खरीदी और 5% लाभ पर उसे सुब्रामनियम को बेच दिया। सुब्रामनियम ने उस साइकिल को मुकुल को 10% लाभ पर बेचा। मुकुल ने साइकिल के लिए कितने रुपए दिए?

11. एक चादर 150 रु में बेचने पर एक व्यक्ति को 4% की हानि होती है। 20% लाभ प्राप्त करने के लिए उसे चादर को कितने रुपए में बेचना चाहिए?

12. एक बढ़ई एक स्टूल को 135 रु में बेच कर 10% की हानि उठाता है। 165 रु में बेचने पर उसे कितने प्रतिशत का लाभ या हानि होगी?

6.4 साधारण ब्याज

कक्षा छः में, साधारण ब्याज के बारे में आप पहले ही पढ़ चुके हैं और आपने इसे ऐकिक विधि द्वारा ज्ञात करना सीखा था। अब हम साधारण ब्याज ज्ञात करने का एक सूत्र प्राप्त करेंगे।

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:

5000 रु पर 3 वर्ष का 5% प्रति वर्ष की दर से ब्याज ज्ञात कीजिए।

यहाँ ब्याज की दर 5% प्रति वर्ष है।

इसका अर्थ है:

100 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = 5 रु

$\therefore$ 1 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{5}{100}$ रु

$\therefore$ 5000 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{5000\times5}{100}$ रु

$\therefore$ 5000 रु पर 3 वर्ष का ब्याज = $\frac{5000\times5\times3}{100}$ रु

अब मान लीजिए मूलधन P है, ब्याज की दर R% प्रति वर्ष है और T वर्षों में समय है। हम, पहले की तरह, निम्न प्रकार से ब्याज परिकलित करते हैं:

ब्याज की दर R% प्रति वर्ष है।

इसका अर्थ है:

100 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = R रु

$\therefore$ 1 रु पर 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{R}{100}$ रु

$\therefore$ P रु पर 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{P\times R}{100}$ रु

$\therefore$ P रु पर T वर्ष का ब्याज I रु = $\frac{P\times R\times T}{100}$ रु

इस प्रकार,

$$I=\frac{P\times R\times T}{100}$$

उपर्युक्त सूत्र से, हम यह भी देखते हैं कि

$$P=\frac{100\times I}{R\times T};\ R=\frac{100\times I}{P\times T}\ \text{और}\ T=\frac{100\times I}{P\times R}\ ।$$

उपर्युक्त सूत्र की सहायता से अब हम कुछ प्रश्न हल करेंगे।

उदाहरण 9: 5000 रु पर 12% प्रति वर्ष की दर से 3 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल: $P = 5000$ रु, $R = 12$, $T = 3$ वर्ष, $I = ?$

$$\therefore \quad I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$= \frac{5000 \times 12 \times 3}{100} \text{ रु} = 1800 \text{ रु}$$

उदाहरण 10: ज्ञात कीजिए:

(i) 5664 रु पर $13\frac{3}{4}\%$ प्रति वर्ष की दर से 9 माह का साधारण ब्याज।

(ii) 3125 रु पर 15% प्रति वर्ष की दर से 73 दिन का साधारण ब्याज।

हल: (i) $P = 5664$ रु, $R = 13\frac{3}{4} = \frac{55}{4}$, $T = \left(\frac{9}{12}\right)$ वर्ष $= \left(\frac{3}{4}\right)$ वर्ष

हम पाते हैं:

$$I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$= \left(\frac{5664 \times \frac{55}{4} \times \frac{3}{4}}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= \left(5664 \times \frac{55}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100}\right) \text{ रु} = 584.10 \text{ रु}$$

(i) $P = 3125$ रु, $R = 15$, $T = \left(\frac{73}{365}\right)$ वर्ष $= \left(\frac{1}{5}\right)$ वर्ष

$$\therefore \quad I = \frac{P \times R \times T}{100} = \left(\frac{3125 \times 15 \times \frac{1}{5}}{100}\right) \text{ रु}$$

$$= 93.75 \text{ रु}$$

उदाहरण 11: किस वार्षिक ब्याज की दर से 500 रु, 3 वर्ष में 605 रु हो जाएँगे?

हल: $P = 500$ रु, $A = 605$ रु, $T = 3$ वर्ष, $R = ?$

हम जानते हैं कि $A = P + I$ (मिश्रधन = मूलधन + ब्याज)

$\therefore \quad I = A - P = 605$ रु $- 500$ रु $= 105$ रु

$$\therefore \quad R = \frac{100 \times I}{P \times T} = \frac{100 \times 105}{500 \times 3} = 7$$

अतः, ब्याज की दर 7% प्रति वर्ष है।

उदाहरण 12: कितने वर्षों में 250 रु, 8% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 330 रु हो जाएँगे?

हल: यहाँ $P = 250$ रु, $A = 330$ रु, $R = 8$, $T = ?$

$\therefore \quad I = (330 - 250)$ रु $= 80$ रु

$$\therefore \quad T = \frac{100 \times I}{P \times R} = \frac{100 \times 80}{250 \times 8} = 4$$

अतः, अभीष्ट समय 4 वर्ष है।

उदाहरण 13: $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक साधारण ब्याज की दर से कोई धन 4 वर्ष में 2437.50 रु हो जाता है। वह मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल: $A = 2437.50$ रु, $R = 12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$, $T = 4$ वर्ष, $P = ?$

मान लीजिए मूलधन x रु है।

तब, साधारण ब्याज $= \left(x \times \frac{25}{2} \times 4 \times \frac{1}{100}\right)$

$= \frac{x}{2}$ रु

$\therefore \quad$ मिश्रधन $= \left(x + \frac{x}{2}\right)$ रु $= \left(\frac{3x}{2}\right)$ रु

इस प्रकार, $\frac{3x}{2} = 2437.50$

या $$x = \frac{2437.50 \times 2}{3} = 1625$$

अत:, मूलधन 1625 रु है।

उदाहरण 14: कितने वर्षों में 400 रु पर 14% वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज 112 रु होगा?

हल: यहाँ P = 400 रु, I = 112 रु, R = 14, T = ?

$$\therefore \quad T = \frac{I \times 100}{P \times R} = \frac{112 \times 100}{400 \times 14} = 2$$

अत:, 14% वार्षिक ब्याज की दर से दो वर्ष में 400 रु का ब्याज 112 रु होगा।

जाँच: P = 400 रु, T = 2 वर्ष, R = 14

$$I = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ रु} = \frac{400 \times 14 \times 2}{100} \text{ रु} = 112 \text{ रु}$$

जो कि प्रश्न में दिए ब्याज के बराबर है।

उदाहरण 15: किसी धन पर ब्याज उस धन का $\frac{16}{25}$ होता है। ब्याज की दर और समय ज्ञात कीजिए, यदि दोनों संख्यत: समान हों।

हल: मान लीजिए मूलधन = x रु

तब साधारण ब्याज = $\frac{16}{25}x$ रु, R = ?, T = ?

मान लीजिए दर = R% और समय = R वर्ष है।

अब, साधारण ब्याज = $\frac{P \times R \times T}{100}$

$$\therefore \quad \frac{16}{25}x = \frac{x \times R \times R}{100}$$

या $$\frac{R^2}{100} = \frac{16}{25}$$

या $$R^2 = \frac{1600}{25} = \left(\frac{40}{5}\right)^2$$

$$\therefore \quad R = \frac{40}{5} = 8$$

अत:, दर = 8% और समय = 8 वर्ष है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न में से प्रत्येक में अज्ञात राशि ज्ञात कीजिए:

   (i) मूलधन = 500 रु, वार्षिक ब्याज की दर = 12%, समय = 3 वर्ष, ब्याज = ...

   (ii) मूलधन = 1250 रु, वार्षिक ब्याज की दर = 14%, समय = 4 वर्ष, ब्याज = ...

   (iii) मूलधन = 200 रु, समय = 5 वर्ष, वार्षिक ब्याज की दर = 6%, ब्याज = ..., मिश्रधन = ...

   (iv) मूलधन = 600 रु, वार्षिक ब्याज की दर = 10%, समय = $3\frac{1}{2}$ वर्ष, ब्याज = ..., मिश्रधन = ...

   (v) मूलधन = 280 रु, वार्षिक ब्याज की दर = 4%, समय = $2\frac{1}{2}$ वर्ष, ब्याज = ...

   (vi) मूलधन = 2850 रु, वार्षिक ब्याज की दर = $3\frac{1}{2}$%, समय = 8 माह, ब्याज = ...

   (vii) मूलधन = 180 रु, वार्षिक ब्याज की दर = 3%, समय = $1\frac{1}{4}$ वर्ष, ब्याज = ..., मिश्रधन = ...

   (viii) मूलधन = 560 रु, समय = 73 दिन, वार्षिक ब्याज की दर = ..., ब्याज = 14 रु

   (ix) मूलधन = 480 रु, समय = 8 माह, ब्याज की दर = $2\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष, ब्याज = ..., मिश्रधन = ...

   (x) मूलधन = 720 रु, वार्षिक ब्याज की दर = 4%, समय = ..., ब्याज = 72 रु, मिश्रधन = ...

   (xi) मूलधन = 500 रु, समय = 3 वर्ष, वार्षिक ब्याज की दर = ..., ब्याज = ..., मिश्रधन = 650 रु

2. साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि
   (i) मूलधन = 800 रु, दर = 6% वार्षिक और समय = 4 वर्ष।
   (ii) मूलधन = 450 रु, दर = 12% वार्षिक और समय = 3 वर्ष।
   (iii) मूलधन = 600 रु, दर = 2% वार्षिक और समय = 20 माह।
   प्रत्येक स्थिति में मिश्रधन भी ज्ञात कीजिए।
3. मूलधन ज्ञात कीजिए, जबकि
   (i) साधारण ब्याज = 36 रु, दर = 3% वार्षिक और समय = 3 वर्ष।
   (ii) साधारण ब्याज = 140 रु, दर = 16% वार्षिक और समय = $2\frac{1}{2}$ वर्ष।
   (iii) साधारण ब्याज = 72 रु, दर = 3% वार्षिक और समय = 3 माह।
4. समय ज्ञात कीजिए, जबकि
   (i) मूलधन = 1000 रु, दर = 8% वार्षिक और साधारण ब्याज = 200 रु।
   (ii) मूलधन = 640 रु, दर = $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक और साधारण ब्याज = 40 रु।
   (iii) मूलधन = 10000 रु, दर = 18% वार्षिक और साधारण ब्याज = 12600 रु।
5. दर ज्ञात कीजिए, जबकि
   (i) मूलधन = 500 रु, साधारण ब्याज = 150 रु और समय = 4 वर्ष।
   (ii) मूलधन = 400 रु, साधारण ब्याज = 78 रु और समय = $1\frac{1}{2}$ वर्ष।
   (iii) मूलधन = 700 रु, साधारण ब्याज = 168 रु और समय = 16 माह।
6. अनिता ने बचत बैंक खाते में 1000 रु जमा किए। बैंक 5% वार्षिक की दर से ब्याज देता है। एक वर्ष के बाद अनिता को कितना मिश्रधन मिलेगा?
7. वीना ने किसी वित्त कंपनी में 7200 रु जमा किए, जो 15% वार्षिक ब्याज देती है। $4\frac{1}{2}$ वर्ष के बाद उसे कितना मिश्रधन मिलेगा?
8. विलियम ने 520 रु किसी बैंक में जमा किए। बैंक 8% वार्षिक ब्याज देता है। दो वर्ष के बाद विलियम को कितना ब्याज और कितना मिश्रधन प्राप्त होगा?
9. किशन लाल ने 9% वार्षिक ब्याज की दर से धन उधार लिया। यदि तीन वर्ष पश्चात् उसने 594 रु ब्याज दिया, तो उधार लिया गया धन ज्ञात कीजिए।

10. अख़्तर $10\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर से कुछ धन उधार लेता है। यदि $2\frac{1}{2}$ वर्ष के पश्चात् वह 1863.75 रु ब्याज देता है, तो वह मूलधन ज्ञात कीजिए।
11. 10% वार्षिक ब्याज की दर से 4 वर्ष में कोई धन 2520 रु हो जाता है। वह धन ज्ञात कीजिए।
12. कोई धन 11% वार्षिक ब्याज की दर से $2\frac{1}{2}$ वर्ष में 2040 रु हो जाता है। वह धन ज्ञात कीजिए।
13. कुछ धन 6 वर्ष में साधारण ब्याज की दर से अपने का $\frac{7}{4}$ गुना हो जाता है। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।
14. हमीद ने किसी साहूकार से 1500 रु उधार लिए। $3\frac{1}{2}$ वर्ष पश्चात् उसने साहूकार को 2655 रु देकर अपना हिसाब चुकता कर दिया। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।
15. कितने समय में कोई धन $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक साधारण ब्याज की दर से अपने से दुगुना हो जाएगा?
[संकेत: माना मूलधन P है। तब मिश्रधन = 2P]

याद रखने योग्य बातें

1. लाभ = वि.मू. – क्र.मू. (यदि वि.मू. > क्र.मू.)
   हानि = क्र.मू. – वि.मू. (यदि वि.मू. < क्र.मू.)
2. उपरिव्यय क्रय मूल्य में शामिल होता है।
3. लाभ% = $\frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

   हानि% = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$
4. साधारण ब्याज $I = \frac{P \times R \times T}{100}$

   जहाँ P = मूलधन, R% = वार्षिक ब्याज की दर, T = समय
5. $P = \frac{I \times 100}{R \times T}$, $R = \frac{I \times 100}{P \times T}$ तथा $T = \frac{I \times 100}{P \times R}$, जहाँ I, P, R तथा T अपने सामान्य अर्थ में हैं।
6. मिश्रधन = मूलधन + ब्याज
   या $A = P + I$

अतीत के झरोखे से

वाणिज्य और व्यापार के क्रियाकलापों की कहानी उतनी ही पुरानी है, जितनी मानव सभ्यता की। सभ्यता के विकास के साथ-साथ व्यक्ति ने समूह में रहना सीखा और अदला-बदली (विनिमय) की पद्धति उपयोग में आने लगी। इसने वाणिज्य और व्यापार के विचार को आगे बढ़ाया। बाद में, विनिमय के लिए मुद्रा का प्रयोग होने लगा। जिससे व्यापार फलने-फूलने लगा। ईसा से 2450 से 2330 वर्ष पूर्व के मिट्टी के शिलालेखों से इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि बेबीलोनिया के लोग उस समय बिलों, वचन-पत्रों या रूक्कों, न्यासों या गिरवी-पत्रों, करों, साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज और अन्य व्यावसायिक गतिविधियों से परिचित थे।

भारतीय गणितज्ञ *ब्रह्मगुप्त* और *भास्कर* त्रैराशिक नियम (तीन का नियम) बनाने के लिए प्रसिद्ध हैं, जिसे सदियों तक व्यापारियों ने एक उपकरण की तरह प्रयोग किया। एक अन्य गणितज्ञ *महावीर* (लगभग 850 ई.) ने भी इस नियम को लगभग इसी प्रकार बताया।

अनुक्रमानुपाती और व्युत्क्रमानुपाती विचरण की संकल्पनाएँ भी सर्वविदित थीं। भास्कर की पुस्तक '*लीलावती*' में निम्न प्रश्न दिया है:

चार ऋतुओं तक जुताई करने वाले बैलों का मूल्य चार निष्क है। बारह ऋतुओं तक जुताई करने वाले बैलों का मूल्य क्या होगा?

रोमवासियों ने ऐसी भिन्नों का प्रयोग किया, जो सरलता से शतांशों में बदली जा सकती थीं, परंतु उन्हें प्रतिशत का ज्ञान नहीं था। पंद्रहवीं शताब्दी की एक इतालवी पांडुलिपि में 20%, 10% और 6% के लिए क्रमशः '20 p 100', '× p cento' तथा 'vi pc°' जैसे व्यंजक बहुलता से मिलते हैं। इस प्रकार, प्रतिशत का संकेत आरंभ में 'per c°', 'pc°' आदि के रूप में पाया जाता है। सत्रहवीं शताब्दी के मध्य में यह संकेत 'per ÷' का रूप ले चुका था। अंत में, 'per' छोड़ दिया गया और इस संकेत ने वर्तमान रूप '%' ले लिया।

भारतीय गणितज्ञ *भास्कर* ने प्रतिशत का प्रयोग अपनी सुविख्यात पुस्तक '*लीलावती*' में ब्याज के प्रश्न हल करने में किया। सोलहवीं शताब्दी में प्रतिशत का प्रयोग मुख्य रूप से ब्याज तथा लाभ और हानि के परिकलनों में होता था। वाक्यांश 'लाभ और हानि' उसी अर्थ में प्रयुक्त होता था जिसमें हम आज पाते हैं। सोलहवीं शताब्दी में इस विषय की लोकप्रियता इस तथ्य से सिद्ध होती है कि लगभग 1561 ई. की अपनी पुस्तक '*Rechenbuch*' में एक गणितज्ञ *वर्नर* (*Werner*) ने इस विषय पर 47 पन्ने लिखे।

बीजीय व्यंजक — अध्याय 7

7.1 भूमिका

पिछली कक्षा में, आपने बीजीय व्यंजकों के विषय में पढ़ा। आप ज़ानते ही हैं कि जब हम संख्याओं और अक्षर-संख्याओं (*literals*) को अंकगणितीय संक्रियाओं (*arithmetic operations*) द्वारा संयोजित करते हैं, तो *बीजीय व्यंजक* (*algebraic expressions*) प्राप्त होते हैं। आप बीजीय व्यंजकों का योग करना जानते हैं और एक बीजीय व्यंजक को दूसरे में से घटाना भी। याद कीजिए कि एक, दो तथा तीन पदों वाले बीजीय व्यंजकों को क्रमशः *एकपदी* (*monomial*) *द्विपद* (*binomial*) तथा *त्रिपद* (*trinomial*) कहा जाता है।

इस अध्याय में, हम आपको ऊपर जैसे बताए गए बीजीय व्यंजकों को गुणा करना सिखाएँगे। यह सीख लेने पर आप दैनिक जीवन की अनेकानेक समस्याओं को हल कर सकेंगे। विशेष दशा में आप एक विशिष्ट प्रकार के संख्यात्मक (*numeric*) व्यंजकों के परिकलन बड़ी सरलता से कर सकेंगे। आप आयतों (*rectangles*) के क्षेत्रफल (*areas*) और घनाभों (*cuboids*) के आयतन (*volumes*) भी ज्ञात कर सकेंगे।

हम आपको *सर्वसमिकाएँ* (*identities*) कहलाने वाले कुछ सरल बीजीय संबंधों के विषय में भी बताएँगे। हम इन सर्वसमिकाओं से संबंधित कुछ रोचक क्रियाकलापों (*activities*) का वर्णन भी करेंगे। इस पूरे अध्याय में, 'व्यंजक' से हमारा तात्पर्य होगा 'बीजीय व्यंजक'।

7.2 एकपदियों का गुणन

याद कीजिए कि एकपदी वे बीजीय व्यंजक होते हैं, जिनमें केवल एक पद होता है, और यह पद या तो कोई संख्या, या कोई अक्षर-संख्या, या फिर संख्याओं और पूर्णांकीय (*integral*) घातांकों (*exponents*) वाली अक्षर-संख्याओं का गुणनफल होता है। किंतु याद

रखें, किसी एकपदी में '+' और '−' *योग और घटाने की संक्रियाओं के संकेतों के रूप में नहीं आ सकते।* हाँ, '+' और '−' एकपदी के बाएँ, संख्याओं के चिह्न के रूप में अवश्य आ सकते हैं।

अब कुछ उदाहरण देते हैं।

$10, -7, 2x$ (या $+ 2x$), $-3x$, $4\,ab^2$, $-15s^2t$, $506\,x^2y^2z^3$, $100\,xy^{-1}$, $6\,a^{-2}b^2c^{-3}d$

आदि, सभी एकपदियाँ हैं। 10 और −7 जैसी एकपदियों को हम सामान्यत: *अचर* (*constants*) कहते हैं। घातांकों को हम सामान्यत: धनात्मक पूर्णांक लेते हैं। इस प्रकार, इस पुस्तक में हम $100xy^{-1}$ जैसे व्यंजकों की बात नहीं करेंगे।

याद कीजिए कि कई संख्याओं को गुणा करते समय, सुविधानुसार हम इन संख्याओं आगे-पीछे कर लेते हैं। गुणा का क्रम हम वह रखते हैं, जो हमें उपयुक्त लगता है। उदाहरणत:,

$(5 \times 91) \times 2 = (91 \times 5) \times 2$ [5 और 91 को आगे-पीछे कर]

$= 91 \times (5 \times 2)$ [गुणा का क्रम बदल कर]

$= 91 \times 10$

$= 910$

क्योंकि अक्षर-संख्याएँ मात्र संख्याओं को ही व्यक्त करती हैं, अत: बीजीय व्यंजकों को गुणा करते समय भी हम ऊपर वाली विधि अपना सकते हैं।

आइए, सबसे पहले ऐसी दो एकपदियों को गुणा करें, जिनमें केवल वही एक अकेली अक्षर-संख्या आती हो।

उदाहरण के लिए, $2x$ और $3x^2$ को गुणा करते हैं। अब,

$(2x) \times (3x^2) = 2 \times x \times 3 \times x^2$

$= (2 \times 3) \times (x \times x^2)$

$= 6 \times x^{1+2}$ $[x = x^1]$

$= 6x^3$

टिप्पणियाँ: 1. पदों को आगे-पीछे कर और साहचर्य से गुणा का क्रम बदल कर, हमने संख्यात्मक गुणनखंडों को एक समूह (2×3) में डाल दिया और अक्षर-संख्याओं को एक दूसरे समूह $(x \times x^2)$ में। एक से अधिक अक्षर-संख्याएँ होने पर समान अक्षर-संख्याओं को हम अलग-अलग समूहित करते हैं।

2. अक्षर-संख्याओं के समूह $(x \times x^2)$ को सरल करने के लिए हमने निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण परिणाम का प्रयोग किया:

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

इस संबंध के अनुसार, एक ही आधार वाली अक्षर-संख्याओं को गुणा करने के लिए इनके घातांकों का योग किया जाता है।

आइए, अब एकपदियों $2xy$ और $3y$ को गुणा करें, जिनमें दो अक्षर-संख्याएँ x और y हैं।

$$\begin{aligned}(2xy) \times (3y) &= 2 \times x \times y \times 3 \times y\\ &= (2 \times 3) \times (x) \times (y \times y)\\ &= 6 \times x \times y^{1+1}\\ &= 6 \times x \times y^2\\ &= 6xy^2\end{aligned}$$

ध्यान दीजिए कि गुणनफल का गुणांक (6), गुणा की जा रही एकपदियों के गुणांकों (2 और 3) का गुणनफल है।

आइए, एक और उदाहरण लें।

$$\begin{aligned}(3ab^2) \times (4a^2 b^2) &= 3 \times a \times b^2 \times 4 \times a^2 \times b^2\\ &= (3 \times 4) \times (a \times a^2) \times (b^2 \times b^2)\\ &= 12 \times (a^3) \times (b^4)\end{aligned}$$

[अक्षर-संख्याओं के प्रत्येक समूह में घातांकों का योग करने पर]

$$= 12a^3 b^4$$

ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में भी गुणनफल का गुणांक, गुणा की जा रही एकपदियों के गुणांकों का गुणनफल है। वास्तव में, एकपदियों को गुणा करने के लिए, उनकी संख्या कितनी भी क्यों न हो, हमारे पास निम्नलिखित सरल व्यावहारिक नियम है:

(A) दी गई एकपदियों के गुणनफल का गुणांक, इन एकपदियों के गुणांकों का गुणनफल होता है।

(B) गुणनफल के अक्षर-सांख्यिक भाग में दी गई एकपदियों में आई सभी अक्षर-संख्याएँ होती हैं। प्रत्येक अक्षर-संख्या का घातांक दी गई एकपदियों में इस अक्षर-संख्या के घातांकों का योग होता है।

उदाहरण 1: एकपदियों $3x^2y^3$ और $-7xy^2z$ को गुणा कीजिए।

हल: ऊपर बताए गए व्यावहारिक नियम से,

$$(3x^2y^3) \times (-7xy^2z) = \{3 \times (-7)\} \times (x^{2+1}) \times (y^{3+2}) \times (z)$$
$$= -21\, x^3y^5z$$

उदाहरण 2: $-7pqr$, $3p^2q$ और $-2pr^2$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए। $p = 1$, $q = 2$ और $r = 3$ के लिए परिणाम की सत्यता जाँचिए।

हल: ऊपर दिए गए नियम से,

$$(-7pqr) \times (3p^2q) \times (-2pr^2) = \{(-7) \times (3) \times (-2)\} \times p^{1+2+1} \times q^{1+1} \times r^{1+2}$$
$$= 42 \times p^4 \times q^2 \times r^3$$
$$= 42\, p^4\, q^2\, r^3$$

$p = 1$, $q = 2$ और $r = 3$ के लिए,

LHS (बायाँ पक्ष) $= (-7 \times 1 \times 2 \times 3) \times (3 \times 1^2 \times 2) \times (-2 \times 1 \times 3^2)$

$= (-42) \times 6 \times (-18)$

$= (-252) \times (-18)$

$= 252 \times 18$

$= 4536$

RHS (दायाँ पक्ष) $= 42 \times 1^4 \times 2^2 \times 3^3$

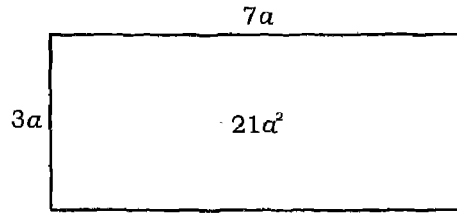
$= 42 \times 4 \times 27$

$= 168 \times 27$

$= 4536$

इस प्रकार, LHS = RHS

टिप्पणियाँ: 1. यदि चरों के किन्हीं विशिष्ट मानों के लिए, LHS (बायाँ पक्ष) और RHS (दायाँ पक्ष) बराबर न हों (LHS $\neq$ RHS), तो निश्चित है कि आपसे कहीं त्रुटि हुई है। अतः, अच्छा होगा कि आप सदा चरों के छोटे शून्येतर मानों के लिए परिणाम को सत्यापित कर लें।

2. याद कीजिए कि लंबाई l और चौड़ाई b वाले आयत का क्षेत्रफल $l \times b$ होता है। यदि हम l और b को एकपदियाँ मानें, तो दोनों एकपदियों का गुणनफल एक आयत के क्षेत्रफल के रूप में समझा जा सकता है। इस प्रकार, एकपदियों $3a$ और $7a$ का गुणनफल $21a^2$ लंबाई $7a$ और चौड़ाई $3a$ वाले आयत के क्षेत्रफल के रूप में लिया जा सकता है (आकृति 7.1) । इस टिप्पणी से हमें कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं को समझने में सहायता मिलेगी।

आकृति 7.1

7.3 किसी एकपदी और किसी द्विपद का गुणन

याद कीजिए कि प्रत्येक द्विपद दो एकपदियों का योग अथवा अंतर होता है। इस प्रकार,

$$x + y,\ 2x - 3y,\ a^2b + 7c,\ 9p - \frac{7}{2},\ 2.3q - 1.9r$$

आदि द्विपद हैं। किसी एकपदी और किसी द्विपद का गुणनफल जानने के लिए, हमें $9x\,(6y + 10z)$, $a^2bc\,(2c - 3ac^3)$ जैसे व्यंजकों का मान निकालना होगा।

क्योंकि अक्षर-संख्याएँ मात्र संख्याओं को ही व्यक्त करती हैं, अतः ये व्यंजक $a(b + c)$ जैसे ही हैं, जहाँ कि a, b और c संख्याएँ हैं। आप जानते हैं कि

$$a\,(b + c) = ab + ac,\ a(b - c) = ab - ac \qquad (1)$$

$$(a + b)\,c = ac + bc,\ (a - b)\,c = ac - bc \qquad (2)$$

अतः, किसी एकपदी और किसी द्विपद को गुणा करने के लिए, हम निम्नलिखित नियमों का प्रयोग करेंगे:

$$\mathrm{P(Q + R) = PQ + PR,\ P(Q - R) = PQ - PR} \qquad (3)$$

$$\mathrm{(P + Q)R = PR + QR,\ (P - Q)\,R = PR - QR} \qquad (4)$$

जबकि P, Q और R एकपदियाँ हैं (अतः P + Q तथा P – Q द्विपद हैं)।

उदाहरण 3: $\frac{1}{2}a^2b$ और $3ab - 5a^3b^4$ को गुणा कीजिए।

हल: ऊपर दिए गए संबंध (3) का प्रयोग करने पर,

$$\frac{1}{2}a^2b(3ab - 5a^3b^4) = \frac{1}{2}a^2b \times 3ab - \frac{1}{2}a^2b \times 5a^3b^4$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3\right) \times a^{2+1} \times b^{1+1} - \left(\frac{1}{2} \times 5\right) \times a^{2+3} \times b^{1+4}$$

$$= \frac{3}{2}a^3b^2 - \frac{5}{2}a^5b^5$$

सत्यापन: आइए, परिणाम को $a = 2, b = 1$ के लिए जाँचें।

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}a^2b(3ab - 5a^3b^4) = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 1\ (3 \times 2 \times 1 - 5 \times 2^3 \times 1^4)$$

$$= 2(6 - 40) = -68$$

$$\text{RHS} = \frac{3}{2}a^3b^2 - \frac{5}{2}a^5b^5 = \frac{3}{2} \times 2^3 \times 1^2 - \frac{5}{2} \times 2^5 \times 1^5$$

$$= 12 - 80 = -68$$

अत:, LHS = RHS है। अर्थात् परिणाम ठीक है।

टिप्पणी: किसी एकपदी को किसी द्विपद से गुणा करने की ऊपर बताई गई विधि *क्षैतिज विधि* या *पंक्ति विधि* कहलाती है। यह इसलिए कि कार्य, क्षैतिज रूप में, पंक्तियों (पन्ने के समांतर रेखाओं) में किया गया। यदि हम कार्य को *ऊर्ध्वाधर* (*vertically*), अर्थात् ऊपर से नीचे को स्तंभों में करते, तो विधि *ऊर्ध्वाधर* अथवा *स्तंभ विधि* कहलाती।

उदाहरण 4: $2x$ तथा $3x + 4y$ को दो भिन्न विधियों से गुणा कर परिणाम का सत्यापन कीजिए।

हल: *क्षैतिज (पंक्ति) विधि से गुणन:*

$$2x\,(3x + 4y) = 2x \times 3x + 2x \times 4y$$

$$= 6x^2 + 8xy$$

ऊर्ध्वाधर (स्तंभ) विधि से गुणन:

$$\begin{array}{r} 3x + 4y \\ \times \quad\ 2x \\ \hline 2x \times 3x \rightarrow \underline{6x^2 + 8xy} \leftarrow 2x \times 4y \end{array}$$

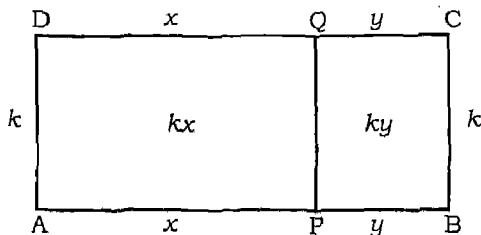
इस प्रकार, दोनों ही विधियों से गुणनफल $6x^2 + 8xy$ आता है।

टिप्पणी: गुणा करने के लिए आप ऊपर दी गई दोनों में से कोई भी विधि अपना सकते हैं; परिणाम वही आता है।

किसी एकपदी और किसी द्विपद के गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या

सरलता को ध्यान में रखते हुए, एक एकपदी k और एक द्विपद $x+y$ लेते हैं। चौड़ाई k और लंबाई $x+y$ वाला एक आयत ABCD खींचते हैं। AB पर एक बिंदु P ऐसा लेते हैं कि

$AP = x$ (अत: $PB = y$) हो।

PQ॥AD खींचते हैं जो DC से Q पर मिले।

आकृति 7.2

अब,

आयत ABCD = आयत APQD + आयत PBCQ

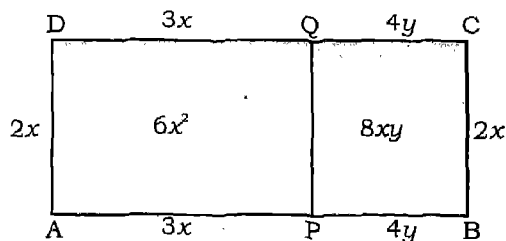
अत:, आयत ABCD का क्षेत्रफल = आयत APQD का क्षेत्रफल + आयत PBCQ का क्षेत्रफल

$$= k \times x + k \times y$$

$$= kx + ky$$

$$= k(x + y)$$

इस प्रकार, व्यंजक $k(x+y)$, चौड़ाई k और लंबाई $x+y$ वाले आयत का क्षेत्रफल हुआ।

एक और उदाहरण के लिए, उदाहरण 4 में आए गुणनफल $2x(3x+4y)$ को लीजिए। हमने देखा कि यह गुणनफल $6x^2+8xy$ के बराबर है। अब एक आयत ABCD खींचिए, जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमश: $3x+4y$ और $2x$ हों। अब सत्यापित करेंगे कि इसका क्षेत्रफल $6x^2+8xy$ है (आकृति 7.3)।

आकृति 7.3

AB पर एक बिंदु P ऐसा लीजिए कि AB = $3x$ हो। तब PB = $4y$ होगा। P से AD के समांतर एक रेखा खींचिए, जो DC से Q पर मिले। तब,

आयत ABCD का क्षेत्रफल = आयत APQD का क्षेत्रफल + आयत PBCQ का क्षेत्रफल

$$= 3x \times 2x + 4y \times 2x$$

$$= 6x^2 + 8xy$$

अतः, परिणाम सत्यापित हुआ।

प्रश्नावली 7.1

1. दी गई एकपदियों को गुणा कीजिए:

   (i) $2a$ और $3a$ (ii) $2a^3$ और $4a^2$

   (iii) $6ab$ और $-7bc$ (iv) $7x^2$ और $-7xyz$

   (v) $\frac{2}{5}x^2y^3$ और $\frac{10}{17}xy^2$ (vi) $\frac{3}{4}abc$ और $\frac{8}{9}a^2b^3c^4$

   (vii) $1.2\ pq^2$ और $0.6\ p^2q^2$ (viii) $0.9\ pqr$ और 11.0

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $(5a^2b)\ (3b^2c)\ (4ac^2)$

   (ii) $(15pq)\ (2p^2q^2)\ (10)$

   (iii) $(-3)\ (-5bc)\ (7\ b^2c^2d^2)$

   (iv) $\left(\frac{2}{3}xyz\right)\left(\frac{3}{4}x^2y^2z^2\right)\left(\frac{4}{5}x^3y^3z^3\right)$

   (v) $(1.1\ pq)\ (2.2\ qr)\ (3.3\ rp)$

   (vi) $(0.9\ ab)\ (-0.3\ b^2c^3)\ (-2.0\ a^3c^3)$

3. निम्नलिखित प्रत्येक गुणनफल को एकपदी के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $(a^2)\ (a^{22})\ (a^{36})\ (a^{40})$

   (ii) $(a^{50}b^{51})\ (b^{49}c^{67})\ (c^{33}d)\ (d^{100}a^{100})$

   (iii) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)\left(\frac{-9}{10}a^2\right)\left(\frac{10}{27}bc^2\right)(0.5)$

   (iv) $(a^{1000})\ (b^{9999})\ (abc)\ (0)$

4. एकपदियों a^3, $\frac{1}{2}a^2$ और $-100a$ को गुणा कीजिए। $a = -1$ के लिए परिणाम की सत्यता जाँचिए।

5. $0.3\,xy$ और $-100\,x^2y^3$ को गुणा कीजिए। $x = 0.1$ और $y = -10$ के लिए परिणाम को सत्यापित कीजिए।

6. $(32a^6)\,(-100ab^2)\,(0.5a^3b^3)$ को एकपदी के रूप में व्यक्त कर, $a = 1, b = \frac{1}{2}$ के लिए इसका मान बताइए।

7. $x = 1.0$ और $y = 0.5$ के लिए $6.4x^3$, $8.0y^3$ और $-1.6x^2y^2$ के गुणनफल का मान बताइए।

8. प्रत्येक पक्ष को एकपदी के रूप में व्यक्त कर यह सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित संबंध सही हैं:

   (i) $(xy)\,(x^9y^9) = (x^9y^9)\,(xy)$

   (ii) $(5abc)\,(-\frac{1}{500}\,a^5b^{50}c^{500}) = \left(\frac{-1}{500}a^5b^{50}c^{500}\right)(5abc)$

9. सरल कीजिए:

   (i) $(-3a) \times (-4a^2x^2) \times (5.5x^3)$

   (ii) $\left(\frac{3}{4}p^2qr\right) \times \left(5pq^2\right) \times \left(\frac{-8}{150}r^2\right)$

10. धनात्मक पूर्णांकीय गुणांकों वाली दो ऐसी एकपदियाँ बताइए, जिनका गुणनफल नीचे दी गई एकपदी हो:

    (i) xyz

    [[illegible] x और yz; y और xz ; z और xy; 1 और xyz ।]

    (ii) a^2b (iii) $7pq$

11. निम्नलिखित गुणनफल ज्यामितीय रूप में क्या व्यक्त करते हैं?

    (i) $3x \times 4x$ (ii) $7 \times 5p$

12. गुणनफल में संख्यात्मक गुणांक ज्ञात कीजिए:

(i) $14abcd$, $10b^2c^2$ और $2a^3d^3$ के।

(ii) $-3a^5b^6c^{37}$, $-4b^5c^7d^{11}$ और $5abcd$ के।

13. गुणनफल में अक्षर-सांख्यिक भाग बताइए:

(i) $-3.998a^2$, $-171.47\,b^2$, $36.01c^2$ और $2d^2$ के।

[संकेत: अगर आप संख्यात्मक गुणांकों को गुणा करने का विचार बना रहे हों, तो समझ लेना, सब आपकी हँसी उड़ाएँगे !]

(ii) $\frac{81}{347}xyz$, $\frac{1573}{410}y^2z^2$ और $\frac{810}{327}x^3z^3$ के।

14. गुणा कीजिए:

(i) $5a+6$ को $3a$ से

(ii) $3a+13$ को $-2a^2$ से

(iii) $2x^2-3xy^2$ को $4x$ से

(iv) $-3p^2-7pq$ को $5pqr^2$ से

15. गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1}{2}x$ और $\left(\frac{3}{4}xy^2+x^2y\right)$ का

(ii) $3ab^2$ और $\left(\frac{7}{9}a^2b^3-\frac{2}{3}a^3b^2\right)$ का

16. निम्नलिखित को द्विपद के रूप में व्यक्त कर $a=2$ और $b=1$ पर इनका मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(a^2b-0.5ab^2)\times(3.3a)$

(ii) $-2.7a^2\,(0.3b^2-0.4a^2)$

17. गुणा कीजिए और $x=2, y=1$ तथा $z=-1$ के लिए परिणाम को सत्यापित कीजिए:

(i) $(x^2-y^2)(-3xy)$

(ii) $\frac{1}{2}x^3y^3z^3\,(x^2+y^2)$

18. सरल कीजिए:

(i) $a(a-b)+b(a-b)$

(ii) $a^2-b^2+a(a+b)$

(iii) $a(a^2+1)+b(b^2+1)-(a+b)$

(iv) $10p^2-6p\,(p+9)+p(3-7p)$

7.4 द्विपदों का गुणन

किसी द्विपद को किसी एकपदी से गुणा करना सीख लेने के बाद, किसी द्विपद को किसी द्विपद से गुणा करना एक सरल कार्य है। याद कीजिए कि दी गई संख्याओं a, b, c और d के लिए, $(a + b)(c + d)$ का मान हम नीचे दिए गए नियमों से ज्ञात करते हैं:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

या $$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$$

यदि आप a, b, c और d में से प्रत्येक के स्थान पर एक एकपदी ले लें, तो द्विपद को द्विपद से गुणा करने के नियम प्राप्त हो जाएँगे। आपको केवल इतना ही करना है कि पहले गुणनखंड की प्रत्येक एकपदी को दूसरे गुणनखंड की प्रत्येक एकपदी से गुणा करना है, और इस प्रकार प्राप्त होने वाले चारों गुणनफलों को जोड़ लेना है। स्पष्ट है कि दो द्विपदों को गुणा करने की इस विधि को *क्षैतिज विधि* कहा जाएगा।

उदाहरण 5: गुणनफल $(3a + 2b)(2a - 3b)$ निकालिए और $a = -1, b = 2$ लेकर परिणाम का सत्यापन कीजिए।

हल: $(3a + 2b)(2a - 3b) = 3a(2a - 3b) + 2b(2a - 3b)$

$= 6a^2 - 9ab + 4ab - 6b^2$

$= 6a^2 - 5ab - 6b^2$ [समान पदों $-9ab$ और $4ab$ का योग करने पर]

अत:, $(3a + 2b)(2a - 3b) = 6a^2 - 5ab - 6b^2$

सत्यापन: $a = -1$ और $b = 2$ लेने पर,

LHS $= (3a + 2b)(2a - 3b)$

$= \{3 \times (-1) + 2 \times 2\}\{2 \times (-1) - 3 \times 2\}$

$= (-3 + 4)(-2 - 6)$

$= 1(-8) = -8$

RHS $= 6a^2 - 5ab - 6b^2$

$= 6(-1)^2 - 5 \times (-1) \times 2 - 6(2)^2$

$= 6 + 10 - 24 = -8$

अत:, LHS = RHS है। अर्थात् परिणाम ठीक है।

टिप्पणी: जब गुणा किए जा रहे द्विपदों में समान आधार वाले कुछ पद हों, जैसे कि ऊपर वाले उदाहरण में थे, तब गुणनफल में कुछ पद समान पद होते हैं। इस दशा में गुणनफल की ऊर्ध्वाधर विधि का प्रयोग लाभप्रद होता है, जैसा कि अगले उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 6: $2a^2 - ab$ और $3a + 2b$ को गुणा कीजिए।

हल: क्योंकि दोनों द्विपदों के पदों में आधार a और b आ रहे हैं, गुणा के लिए ऊर्ध्वाधर विधि का प्रयोग किया जाएगा। यह लगभग वैसी ही है जैसा दो संख्याओं, मान लीजिए 347 और 23, को गुणा करने के लिए प्रयोग करते आए हैं।

$$\begin{array}{rl} 347 & \\ \times\ \underline{23} & \longrightarrow 3 + 20 \\ 1041 & \longrightarrow 347 \times 3 \\ +\ \underline{6940} & \longrightarrow 347 \times 20 \\ \underline{7981} & \end{array}$$

आप 23 को 3 + 20 लिखते थे। तब 347 को पहले 3 से और फिर 20 से गुणा करते थे। गुणनफलों को एक-दूसरे के नीचे लिखकर आप दोनों गुणनफलों का योग कर लेते थे।

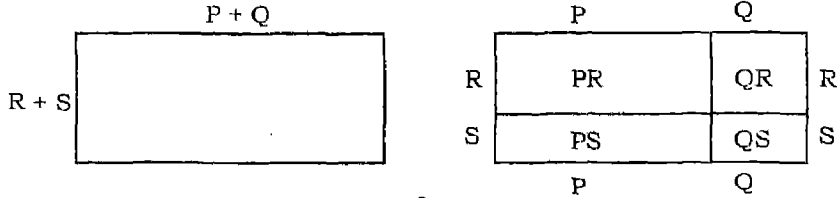
यहाँ हम $2a^2 - ab$ और $3a + 2b$ को ठीक इसी प्रकार गुणा करेंगे। पहले हम $(2a^2 - ab)$ को $2b$ से गुणा करेंगे और फिर $3a$ से। इन दो गुणनफलों को एक-दूसरे के नीचे लिख लेंगे। याद कीजिए कि आप इकाइयों को इकाइयों के नीचे लिखते थे, दहाइयों को दहाइयों के नीचे लिखते थे और आगे भी ऐसे ही करते जाते थे। दूसरे शब्दों में कहें, तो आप *समान पदों* को एक-दूसरे के नीचे स्तंभों में लिखते थे। यहाँ भी हम ऐसा ही करेंगे। अंत में, दोनों गुणनफलों का योग कर लेंगे।

$$\begin{array}{rl} 2a^2 - ab & \\ \times\ \underline{3a + 2b} & \\ 4a^2b - 2ab^2 & \rightarrow 2a^2 - ab \text{ को } 2b \text{ से गुणा करने पर} \\ 6a^3 - 3a^2b \qquad\qquad & \rightarrow 2a^2 - ab \text{ को } 3a \text{ से गुणा कर, समान पदों को स्तंभों में एक-दूसरे के नीचे लिखकर} \\ \hline \underline{6a^3 + a^2b - 2ab^2} & \rightarrow \text{ऊपर के दोनों गुणनफलों का योग करने पर} \end{array}$$

वैकल्पिक हल (क्षैतिज विधि से)

$$\begin{aligned} (2a^2 - ab)(3a + 2b) &= 2a^2(3a + 2b) - ab(3a + 2b) \\ &= 6a^3 + 4a^2b - 3a^2b - 2ab^2 \\ &= 6a^3 + a^2b - 2ab^2 \end{aligned}$$

टिप्पणियाँ: 1. क्योंकि गुणनफल दोनों विधियों से वही आता है, अतः आप किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

2. यदि P, Q, R और S एकपदियाँ हों, तो गुणनफल $(P + Q)(R + S)$ को नीचे दिखाए अनुसार भुजाओं $P + Q$ और $R + S$ वाले एक आयत के क्षेत्रफल के रूप में समझा जा सकता है:

आकृति 7.4

7.5 किसी द्विपद और किसी त्रिपद का गुणन

तीन (असमान) पदों वाले बीजीय व्यंजक को *त्रिपद* कहते हैं। इस प्रकार, $x^2 + y^2 + z^2$, $2x^2 + 3x^2y + 9$, $-3abc + a^3 + 10$ आदि त्रिपद हैं। यदि आप तीन असमान पदों वाली एकपदियों का योग करें, तो त्रिपद प्राप्त होगा। यदि आप एक ऐसी एकपदी और एक ऐसे द्विपद का योग करें जिनके तीनों पद असमान हों, तो भी एक त्रिपद प्राप्त होगा।

यदि हम दो द्विपदों के गुणन का नीचे दिया गया नियम याद रखें, तो एक द्विपद को किसी त्रिपद से गुणा करना एक सरल कार्य होगा:

दो द्विपदों का गुणन निम्नलिखित चरणों में कीजिए:

चरण 1: *प्रथम द्विपद के प्रत्येक पद को द्वितीय द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा कीजिए। (इस प्रकार 4 गुणनफल मिलेंगे।)*

चरण 2: *चरण 1 में प्राप्त सभी गुणनफलों का योग कीजिए।*

ऊपर दिया गया नियम एक द्विपद और एक त्रिपद के गुणन पर नीचे दिए गए रूप में लागू होता है:

द्विपद के प्रत्येक पद को त्रिपद के प्रत्येक पद से गुणा कीजिए। इस प्रकार प्राप्त सभी गुणनफलों को जोड़ लीजिए।

अंतर केवल इतना है कि गुणनफल में चार के स्थान पर छः पद प्राप्त होंगे। उदाहरणतः, $(a + b)$ और $(x + y + z)$ के गुणनफल में निम्नलिखित छः पद प्राप्त होंगे:

$$ax, ay, az, bx, by, bz$$

अतः,
$$(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz \quad (1)$$

इस कार्य को हम निम्न प्रकार व्यवस्थित कर सकते थे:

$$\begin{aligned}(a+b)(x+y+z) &= (a+b)x+(a+b)y+(a+b)z\\ &= (ax+bx)+(ay+by)+(az+bz)\\ &= ax+bx+ay+by+az+bz \qquad (2)\end{aligned}$$

पदों को आगे-पीछे कर संबंध (2) को संबंध (1) के रूप में लाया जा सकता है। *विकल्पतः,*

$$\begin{aligned}(a+b)(x+y+z) &= a(x+y+z)+b(x+y+z)\\ &= (ax+ay+az)+(bx+by+bz)\\ &= ax+ay+az+bx+by+bz\end{aligned}$$

यह संबंध (1) ही है।

अब ऊपर बताई गई तीनों विधियाँ उदाहरणों द्वारा समझाई जाएँगी।

उदाहरण 7: a^2+b^2 और $x^3-y^3+z^3$ को गुणा कीजिए।

हल: चरण 1: द्विपद के पद a^2 को त्रिपद के तीनों पदों से गुणा कीजिए। इससे गुणनफल

$$a^2x^3, -a^2y^3 \text{ और } a^2z^3$$

प्राप्त होते हैं।

अब द्विपद के दूसरे पद b^2 को त्रिपद के तीनों पदों से गुणा करते हैं। ऐसा करने पर गुणनफल

$$b^2x^3, -b^2y^3 \text{ और } b^2z^3$$

प्राप्त होते हैं।

चरण 2: सभी गुणनफलों का योग करने पर प्राप्त होता है:

$$a^2x^3-a^2y^3+a^2z^3+b^2x^3-b^2y^3+b^2z^3$$

अतः, $(a^2+b^2)(x^3-y^3+z^3) = a^2x^3-a^2y^3+a^2z^3+b^2x^3-b^2y^3+b^2z^3$

वैकल्पिक हल: ऊपर के हल में प्रयुक्त तर्क को इस प्रकार सुस्पष्ट रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^3-y^3+z^3) &= a^2(x^3-y^3+z^3)+b^2(x^3-y^3+z^3)\\ &= a^2x^3-a^2y^3+a^2z^3+b^2x^3-b^2y^3+b^2z^3\end{aligned}$$

उदाहरण 8: गुणनफल $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ज्ञात कीजिए।

हल: गुणा का कार्य इस प्रकार किया जाएगा:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)x^2+(x-y)xy+(x-y)y^2$$

$= (x^3 - x^2y) + (x^2y - xy^2) + (xy^2 - y^3)$

$= x^3 + (-x^2y + x^2y) + (-xy^2 + xy^2) - y^3$ [समान पदों को x के घटते हुए घातांकों के क्रम में समूहित करने पर]

$= x^3 - y^3$

प्रश्नावली 7.2

1. गुणा कीजिए:

(i) $(2x + 9)$ तथा $(6x + 5)$ को (ii) $(x - 8)$ तथा $(3x + 7)$ को

(iii) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 7b\right)$ तथा $\left(a^3 + \frac{2}{9}b^2\right)$ को (iv) $(2.5a + 2.3b)$ तथा $(2.5a - 2.3b)$ को

(v) $(2pq + 3q^2)$ तथा $(3pq + 2q^2)$ को

2. गुणा कीजिए और दिए गए मानों के लिए परिणाम का सत्यापन कीजिए:

(i) $(2x - 5)(7 + 4x)$, $x = 2$

(ii) $(x + y)(7x - y)$, $x = 1, y = 0$

(iii) $(a^2 + b)(b^2 + a)$, $a = -1, b = -2$

(iv) $(p^2 - q^2)(p - q)$, $p = 2, q = 0$

3. एकपदी बीजीय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(2x + 3y)(4x^2y + 5xy^2)$

(ii) $(a^5 + 5)(b^3 + 3) + 4$

(iii) $(a + bcd)(a^3 + b^3c^3d^3)$

(iv) $(m^2 - 2n)(-3m - 4n^2) + 3m^3$

(v) $(t^2 + s^3)(t^2 - s^3)$

(vi) $(a + b)(c - d) + (c + d)(a - b) + 2(ac + bd)$

4. सरल कीजिए और $x = 2$ तथा $y = 1$ लेकर परिणाम को सत्यापित कीजिए:
   (i) $\frac{1}{4}(2x^2 - 10y^2)(2x^2 + 10y^2)$
   (ii) $(x^2 + y^2)(-2x^2 - 2y^2)$
   (iii) $(x^2 - 5)(x + 5) + 5$
   (iv) $5x^2 + (x + 7y)(3 - 2y)$
   (v) $(x + y)(2x + y) + (x + 2y)(x - y)$
5. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को गुणा कीजिए:
   (i) $(x + 2y)$ और $(2x - 9y + 7)$
   (ii) $(2x - \frac{1}{2}y)$ और $\left(\frac{3}{4}x - 10y + 8\right)$
   (iii) $(x^2 + y^2)$ और $(x + y + xy)$
   (iv) $(a + b + c)$ और $(a^3 - b^3)$
6. गुणनफल ज्ञात कीजिए:
   (i) $(1.5x - 4y)(1.5x + 4y + 3)$
   (ii) $(m^2 + n^2 + p^2)(p^2 - n^2)$
7. सरल कीजिए:
   (i) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
   (ii) $x^2 + (3x - y)(3x + y + y^2)$
   (iii) $x(x + y^2 + z) + y^2(x + y + z) - z(x + y^2)$
   $x = 1, y = 1$ और $z = 2$ के लिए इस प्रश्न के परिणाम सत्यापित कीजिए।

7.6 मानक सर्वसमिकाएँ

$a + b$ और $a - b$ दो सरल-साधारण द्विपद हैं। इनको स्वयं से अथवा एक-दूसरे से गुणा करने पर निम्नलिखित तीन गुणनफल प्राप्त होते हैं:

1. $(a + b)(a + b)$ या $(a + b)^2$
2. $(a - b)(a - b)$ या $(a - b)^2$
3. $(a + b)(a - b)$

यह गुणनफल बीजगणित (algebra) में बहुधा (काम) आते हैं। सीधे-सीधे गुणा कर इन गुणनफलों के लिए हम सरलता से ऐसे व्यंजक प्राप्त कर सकते हैं, जो अधिक उपयोगी सिद्ध हों।

I. $(a + b)^2$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$
$$= a^2 + (ab + ab) + b^2 \quad [\because ab = ba]$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{[समान पदों का योग करने पर]}$$

इस प्रकार, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1)

$(a + b)^2$ को प्रायः एक *द्विपद-वर्ग* या *द्विपद का वर्ग* कहा जाता है। शब्दों में, *किसी द्विपद का वर्ग उसके प्रथम पद के वर्ग, उसके द्वितीय पद के वर्ग तथा उसके दोनों पदों के गुणनफल के दुगुने का योग होता है।*

इस प्रकार, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$,

जो संबंध (1) ही है।

टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$।

संबंध (1), अर्थात्

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

के विषय में एक रोचक तथ्य यह है कि *यह संबंध a के प्रत्येक मान और b के भी प्रत्येक मान के लिए सही है।* उदाहरणत: $a = 2$ और $b = 1$ लेने पर,

$$\text{LHS} = (a + b)^2 = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9,$$

और $$\text{RHS} = a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 1 + 1^2$$
$$= 4 + 4 + 1 = 9$$

इस प्रकार, LHS = RHS सही हुआ।

a और b के कुछ और भिन्न-भिन्न मान लेकर देखिए। आप सदा LHS = RHS पाएँगे। यह एक रोचक स्थिति है, क्योंकि अक्षर-संख्याओं के प्रत्येक संबंध में यह गुण होना आवश्यक नहीं। उदाहरण के लिए, संबंध

$$a + 3 = 2a + 1$$

a के केवल एक मान 2 के लिए ही सही है। $a = 1$ के लिए यह संबंध ठीक नहीं है। (2 के अतिरिक्त कोई अन्य मान लेकर आप स्वयं को संतुष्ट कर सकते हैं।) एक और उदाहरण लीजिए। संबंध

$$b^2 = ab + b$$

सही है, यदि $a = 1$ और $b = 2$ ले लें। किंतु $a = 2$ और $b = 1$ के लिए यह ठीक नहीं है।

यदि कोई संबंध उन सभी अक्षर-संख्याओं के *प्रत्येक मान* के लिए ठीक हो, जो इसमें आती हैं, तो इस संबंध को *सर्वसमिका* (*identity*) कहा जाता है। इस प्रकार, निम्नलिखित संबंध एक सर्वसमिका है:

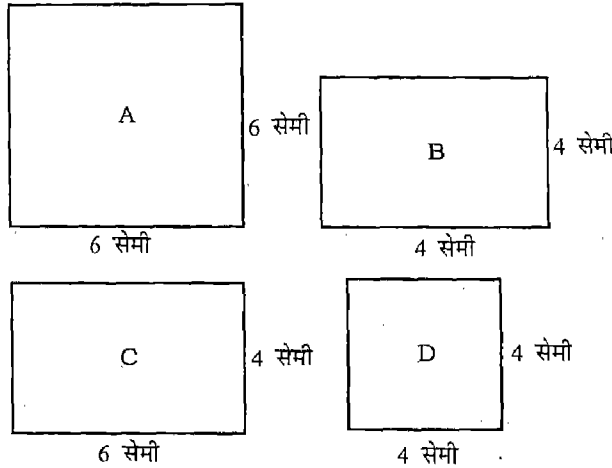
सर्वसमिका 1:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

या

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

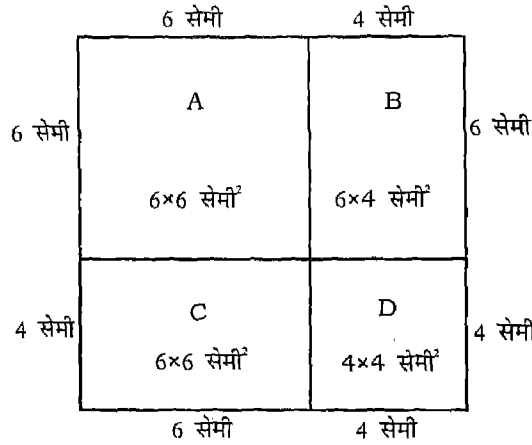
क्रियाकलाप 1: किसी गत्ते या पुराने ग्रीटिंग-कार्ड के टुकड़े से नीचे बताई गई आकृतियाँ काट लीजिए:

1. भुजा 6 सेमी वाला एक वर्गाकार टुकड़ा।
2. 6 सेमी तथा 4 सेमी भुजाओं वाले दो आयताकार टुकड़े।
3. भुजा 4 सेमी वाला एक वर्गाकार टुकड़ा।

आकृति 7.5

इन टुकड़ों को A, B, C और D कहिए। इन टुकड़ों के क्षेत्रफल क्रमश: (6×6) सेमी², (6×4) सेमी², (6×4) सेमी² और (4×4) सेमी² हैं। इस प्रकार, इन टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल हुआ:

(6×6) सेमी² + (6×4) सेमी² + (6×4) सेमी² + (4×4) सेमी²

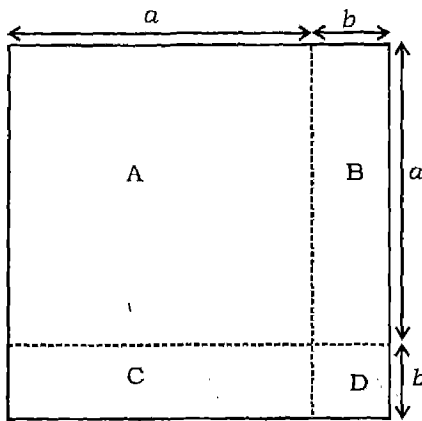
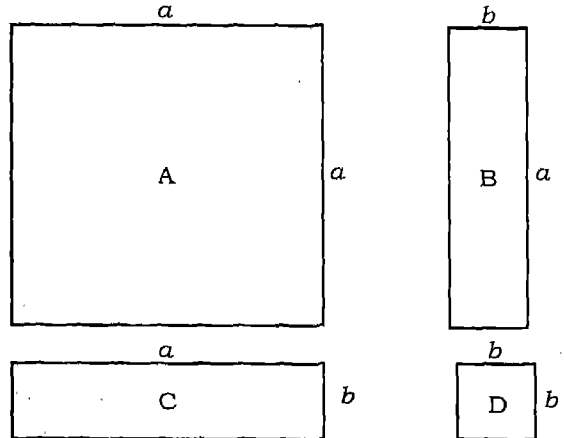
या $[6^2 + 2(6 \times 4) + 4^2]$ सेमी²

क्या आप इन चार टुकड़ों से एक वर्गाकार आकृति बना सकते हैं? एक ऐसी आकृति आगे दिखाई गई है।

आकृति 7.6

इस वर्गाकार टुकड़े की भुजा की लंबाई क्या है? स्पष्ट है कि इसकी भुजा $(6+4)$ सेमी लंबी है। इसका क्षेत्रफल क्या है? क्षेत्रफल $(6+4) \times (6+4)$ सेमी^{2} या $(6+4)^2$ सेमी^{2} है। यह क्षेत्रफल टुकड़ों A, B, C और D के कुल क्षेत्रफल के बराबर भी है। यहाँ से,

$$(6+4)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 4 + 4^2$$

अत:, $a = 6$ और $b = 4$ के लिए सर्वसमिका I सत्यापित हुई।

हम इस प्रक्रम की विपरीत क्रिया भी कर सकते हैं। टुकड़ों से आरंभ करने के स्थान पर, पूर्ण आकृति से आरंभ कर इसके टुकड़े कर सकते हैं। किसी गत्ते (या पुराने ग्रीटिंग कार्ड) का भुजा $(a+b)$ सेमी वाला एक वर्गाकार टुकड़ा लीजिए। आकृति 7.7 के अनुसार, इसे चार टुकड़ों में बाँट लीजिए। बिंदुकित रेखाओं पर काटिए, जिससे कि टुकड़े अलग हो जाएँ (आकृति 7.8)।

आकृति 7.7

आकृति 7.8

अब आरंभिक वर्ग का क्षेत्रफल $(a + b)^2$ है। टुकड़ों A, B, C और D के क्षेत्रफल क्रमश: a^2, ab, ab और b^2 हैं। क्योंकि टुकड़ों का क्षेत्रफल कुल मिलाकर वही है जो आरंभिक वर्ग का है, अत: आवश्यक होगा कि

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

या $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

इस प्रकार, व्यापक रूप में, सर्वसमिका I सत्यापित हुई।

उदाहरण 9: सर्वसमिका I का प्रयोग कर, मान निकालिए :

(i) 203^2 का और (ii) $(2x + 3y)^2$ का।

हल: (i) $203^2 = (200 + 3)^2$

$= 200^2 + 2 \times 200 \times 3 + 3^2$ [सर्वसमिका I]

$= 40000 + 1200 + 9$

$= 41209$

(ii) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2$ [सर्वसमिका I]

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

II. $(a - b)^2$

सर्वसमिका I में, b के स्थान पर $-b$ रखने से, हमें प्राप्त होता है:

$$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

या $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (2)$$

स्पष्टत:, संबंध (2) भी a और b के सभी मानों के लिए सत्य है। यह तो होना ही था, क्योंकि संबंध (2) सर्वसमिका I में b का मान $-b$ लेने पर आया था। संबंध (2) सीधे ही इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता था:

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$= a(a - b) - b(a - b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

इस प्रकार, हमें निम्न सर्वसमिका प्राप्त होती है:

सर्वसमिका II :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

या

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

शब्दों में,

द्विपद-अंतर $a - b$ का वर्ग, अर्थात् $(a - b)^2$, पहले पद के वर्ग में दूसरे पद के वर्ग को जोड़कर, योग में से दोनों पदों के गुणनफल का दुगुना घटा देने पर प्राप्त होता है।

इस प्रकार,

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

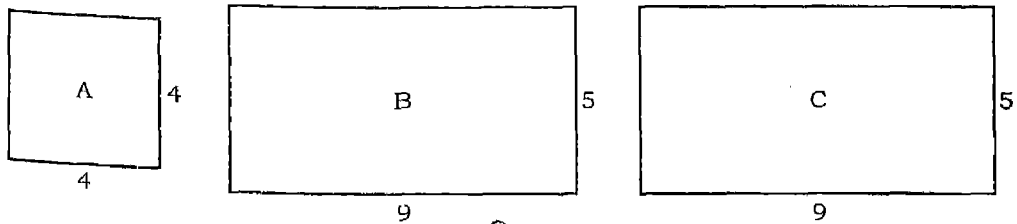
आपको यह बात सदा याद रखनी चाहिए कि यद्यपि हमने सर्वसमिकाओं I और II को अलग-अलग लिखा है, तथापि वे भिन्न नहीं हैं। यदि आप सर्वसमिका II में b के स्थान पर $-b$ लिख दें, तो जैसा कि नीचे दिखाया गया है, सर्वसमिका I प्राप्त होगी:

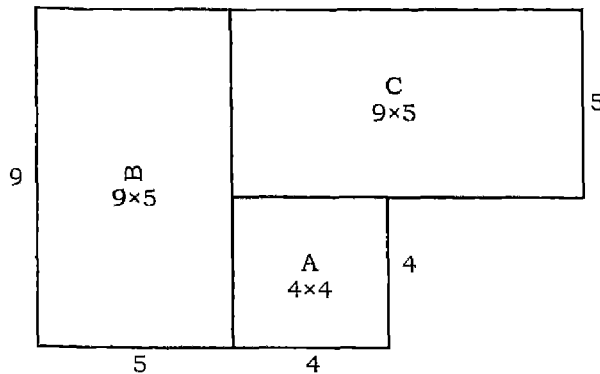
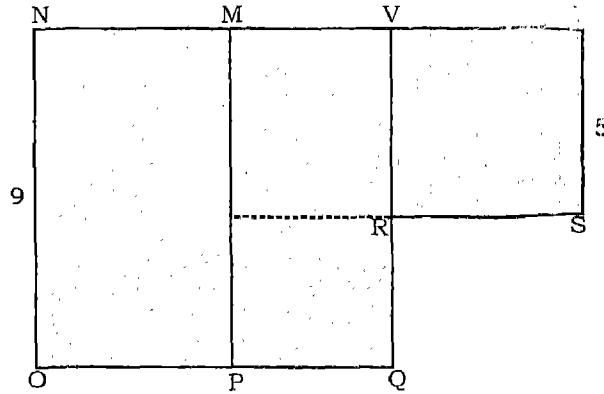
$$\{a-(-b)\}^2 = a^2 - 2a(-b) + (-b)^2$$

या

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

याद कीजिए कि सर्वसमिका I में b के स्थान पर $-b$ लिखकर सर्वसमिका II प्राप्त की गई थी। अतः वास्तव में दोनों सर्वसमिकाएँ एक ही हैं।

क्रियाकलाप 2: आइए, गत्ते के टुकड़े से एक और रोचक क्रिया की जाए। आकृति 7.9 में, गत्ते का एक 4×4 वर्गाकार टुकड़ा और गत्ते के ही दो 9×5 आयताकार टुकड़े दिखाए

आकृति 7.9

गए हैं। क्या आप इन टुकड़ों को इस प्रकार रख सकते हैं कि दो वर्गों से बनी कोई आकृति प्राप्त हो? टुकड़ों को एक-दूसरे के ऊपर रखने की अनुमति नहीं है। यह कार्य उतना सरल तो नहीं जितना टुकड़ों को क्रियाकलाप 1 में इधर-उधर कर रखना, परंतु यह कार्य अधिक कठिन भी नहीं है। यदि आप कुछ देर टुकड़ों को उपयुक्त आकृति में रखने का प्रयास करेंगे, तो आकृति 7.10 जैसा कोई आकार प्राप्त होगा।

आकृति 7.10

आकृति 7.11

आकृति 7.11 में दिखाए गए अनुसार, आकार का नामांकन कीजिए। जैसे दिखाया गया है, QR को बढ़ाकर इसे MT से V पर मिलने दीजिए। अब,

$$OQ = OP + PQ$$

$$= 5 + 4 \qquad \text{[आकृति 7.10 से]}$$

$$= 9$$

अतः, OQVN एक 9×9 वर्ग है।

क्योंकि $MT = 9$ और $MV = PQ = 4$ है,

अतः $VT = 9 - 4 = 5$ हुआ।

अतः, VRST *एक* 5×5 *वर्ग है।*

इस प्रकार, आकृति 7.11 दो वर्गों से बनी है। यही हम चाहते थे। इन दोनों वर्गों का क्षेत्रफल कुल मिलाकर है:

$$9^2 + 5^2$$

क्योंकि यह आकृति आरंभ के उन तीन टुकड़ों से बनाई गई है, जिनका कुल क्षेत्रफल है:

$$9 \times 5 + 9 \times 5 + 4 \times 4,$$

अतः,

$$9^2 + 5^2 = 2 \times 9 \times 5 + 4^2$$

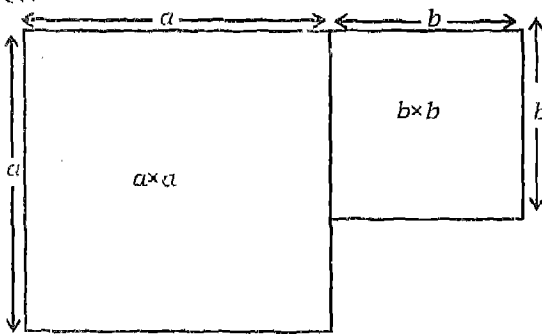
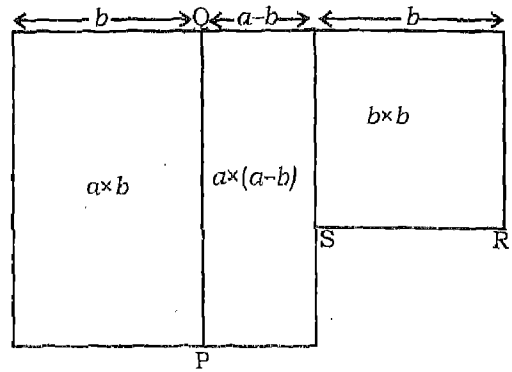
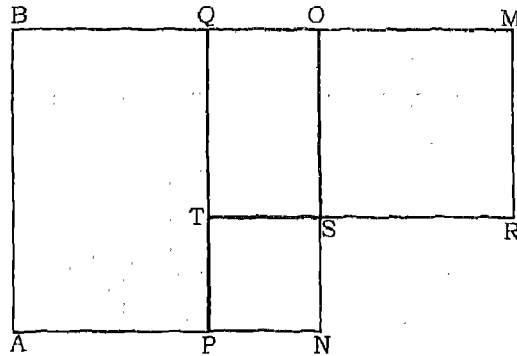
या

$$9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5 = 4^2 = (9 - 5)^2$$

इस प्रकार,

$$(9 - 5)^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5$$

किंतु यह सर्वसमिका II का एक उदाहरण है।

इस प्रक्रम को विपरीत रूप में भी किया जा सकता है। इसके लिए आकृति 7.12 में दिखाए गए, भुजाओं a और b वाले दो वर्गों से आरंभ कीजिए। जैसा कि आकृति 7.13 में दिखाया गया है, $AP = BQ = b$ लेकर बड़े वर्ग में एक रेखा PQ खींचिए जो इसे $a \times b$ और $a \times (a-b)$ आकार वाले दो आयतों में बाँट दे। RS को बढ़ाइए, जिससे आकृति 7.14 प्राप्त हो।

आकृति 7.12

आकृति 7.13

आकृति 7.14

आकृति 7.14 को हम आयत APQB, आयत RMQT और वर्ग PNST से बना हुआ मान सकते हैं। क्योंकि

$$QM = (a-b) + b = a,$$

और $\quad NS = NO - SO = AB - RM = a - b$ है,

अतः: $a^2 + b^2 =$ आकृति 7.12 का क्षेत्रफल

$\qquad\qquad =$ आकृति 7.14 का क्षेत्रफल

= आयत APQB का क्षेत्रफल + आयत RMQT का क्षेत्रफल + वर्ग PNST का क्षेत्रफल

$= ab + ab + (a - b) \times (a - b)$

या $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$

या $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

इस प्रकार, सर्वसमिका II का ज्यामितीय सत्यापन हुआ।

उदाहरण 10: सर्वसमिका II का प्रयोग कर, (i) 4.9^2 और (ii) $(3p - 5q)^2$ के मान निकालिए।

हल: (i) $4.9^2 = (5.0 - 0.1)^2$

$= (5.0)^2 - 2 \times (5.0) \times (0.1) + (0.1)^2$ [सर्वसमिका II)

$= 25.0 - 1.0 + 0.01$

$= 24.01$

(ii) $(3p - 5q)^2 = (3p)^2 - 2 \times (3p) \times 5q + (5q)^2$ [सर्वसमिका II]

$= 9p^2 - 30pq + 25q^2$

III. $(a + b)(a - b)$

सर्वसमिकाओं I और II से अधिक रोचक निम्न सर्वसमिका है:

सर्वसमिका III : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

यह सर्वसमिका गुणा की क्रिया से सरलता से प्राप्त हो जाती है।

$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$

$= a^2 - ab + ba - b^2$

$= a^2 - b^2$ $[\because ab = ba]$

सर्वसमिका III, सर्वसमिकाओं I और II से अधिक सरल है, क्योंकि इसमें गुणन-पद ab नहीं है। शब्दों में, आप इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

द्विपद-योग $a + b$ तथा द्विपद-अंतर $a - b$ का गुणनफल $(a + b)(a - b)$ पहले पद के वर्ग में से दूसरे पद के वर्ग को घटाने पर प्राप्त हो जाता है।

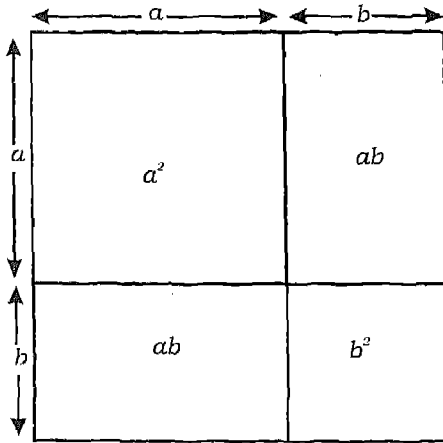
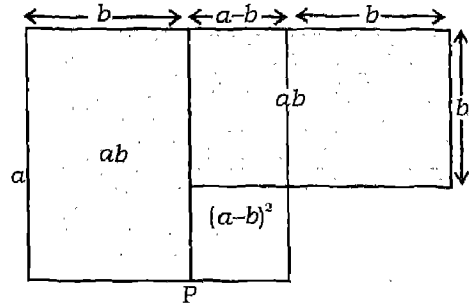
तथापि व्यवहार में इस सर्वसमिका को $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ के स्थान पर निम्नलिखित रूप में याद रखा जाता है:

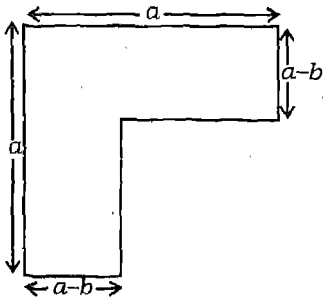
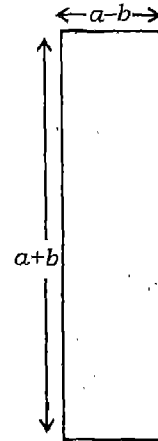
सर्वसमिका III : $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

क्रियाकलाप 3: अब तक यह स्पष्ट हो गया होगा कि अनेक बीजीय व्यंजकों को ज्यामिति की सहायता से समझना कहीं अधिक सरल है। जैसा कि हम पहले ही देख चुके हैं कि सर्वसमिकाओं

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{और} \quad a^2 + b^2 &= (a-b)^2 + 2ab\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

को बिना किसी व्याख्या के नीचे की आकृतियों से समझा जा सकता है:

आकृति 7.15 (सर्वसमिका I)

आकृति 7.16 (सर्वसमिका II)

आइए, अब तीसरी सर्वसमिका को लिया जाए। नीचे एक और पहेली दी जा रही है, जो पहली पहेली से कुछ कठिन पर दूसरी से कुछ सरल है। *क्या आप काटने की क्रिया कर और काटे गए टुकड़ों को दूसरे स्थान पर (बिना आंशिक आच्छादन के) रखकर आकृति 7.17 को आकृति 7.18 में, या विलोमत: आकृति 7.18 को आकृति 7.17 में बदल सकते हैं?*

आकृति 7.17

आकृति 7.18

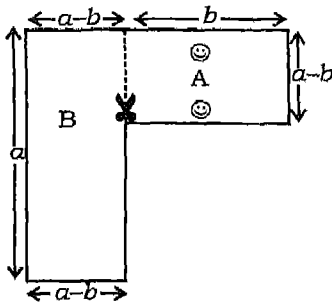
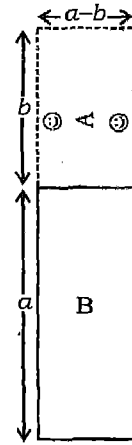
निश्चित रूप से आपने यह तो समझ ही लिया होगा कि इन आकृतियों का सर्वसमिका III, अर्थात्

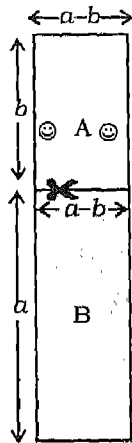
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

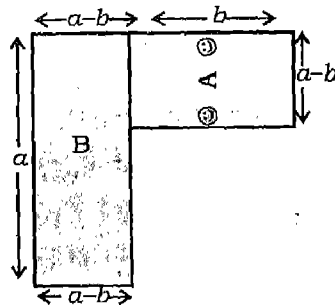
से क्या संबंध है। स्पष्ट है कि आकृति 7.18, $(a+b)(a-b)$ को निरूपित करती है। आकृति 7.17 का नीचे वाला कटा हुआ दाहिना कोना एक $(b \times b)$ टुकड़ा है। इस प्रकार, आकृति 7.17, $a^2 - b^2$ को निरूपित करती है। यदि आपने ऊपर दी गई पहेली को हल कर लिया, तो यह स्पष्ट हो जाएगा कि दोनों का क्षेत्रफल बराबर है, जिससे कि पहले बीजीय विधि से प्राप्त किया गया संबंध

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

फिर से सत्यापित हो जाएगा।

अब (पहेली के) हल की बात की जाए। आकृति 7.17 से आकृति 7.18 का आकार प्राप्त करने की एक सरल विधि नीचे दिखाई गई है:

आकृति 7.19
(भाग A को काटना है)

आकृति 7.20
(A को B के ऊपर रखना है)

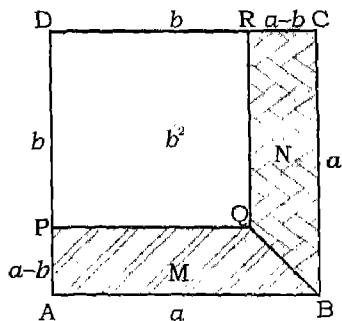
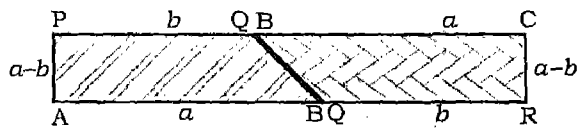
आकृति 7.18 से आकृति 7.17 का आकार प्राप्त करने की विधि अब स्पष्ट हो जाती है। ऊपर से एक $b \times (a - b)$ आयत काटकर (आकृति 7.21), बची हुई आकृति के दाहिनी ओर ऊपर, जैसा कि आकृति 7.22 में दिखाया गया है, लगा दीजिए। इस प्रकार तीसरी सर्वसमिका का ज्यामितीय सत्यापन भी हुआ।

आकृति 7.21

(A का काटना)

आकृति 7.22

(A को B के साथ लगाना)

क्रियाकलाप 4: सर्वसमिका III का सत्यापन इस प्रकार भी किया जा सकता था: भुजा a वाला गत्ते का एक वर्ग ABCD लीजिए (आकृति 7.23)। AD पर एक बिंदु P और DC पर एक बिंदु R इस प्रकार लीजिए कि

$$PD = DR = b$$

तब, $$AP = RC = a - b$$

आकृति 7.23

आकृति 7.24

वर्ग PQRD को पूरा कीजिए। अब आकृति 7.23 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल $a^2 - b^2$ हुआ। B और Q को मिलाइए। टुकड़ों ABQP (M) और BCRQ (N) को काट लीजिए। इन टुकड़ों को आकृति 7.24 की भाँति जोड़ दीजिए, जिससे कि टुकड़े N का शीर्ष Q, टुकड़े M के शीर्ष B पर आए और टुकड़े N का शीर्ष B टुकड़े M के शीर्ष Q पर आए।

अब, आयत ARCP का क्षेत्रफल $= (a + b)(a - b)$

क्योंकि (आयत) ARCP टुकड़ों M और N से बना है और इन टुकड़ों का क्षेत्रफल कुल मिलाकर $a^2 - b^2$ है, अत: फिर सत्यापित हुआ कि

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

उदाहरण 11: सर्वसमिका III का प्रयोग कर,

(i) $981^2 - 19^2$ और (ii) 189×211 के मान निकालिए।

हल: (i) $981^2 - 19^2 = (981 + 19)(981 - 19)$ [सर्वसमिका III]

$= (1000)(962)$

$= 962000$

(ii) $189 \times 211 = (200 - 11)(200 + 11)$

$= 200^2 - 11^2$ [सर्वसमिका III]

$= 40000 - 121$

$= 39879$

प्रश्नावली 7.3

1. उपयुक्त सर्वसमिका के प्रयोग से गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$

(iii) $\left(\frac{2}{5}p + 3\right)\left(\frac{2}{5}p + 3\right)$ (iv) $(1.1m + 2.1)(1.1m + 2.1)$

(v) $(3a + 4b)(3a + 4b)$ (vi) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)$

2. गुणा करने के लिए उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कीजिए:

(i) $(a - 5)$ और $(a - 5)$ (ii) $\left(2a - \frac{1}{2}\right)$ और $\left(2a - \frac{1}{2}\right)$

(iii) $\left(\frac{5}{2}x - 7\right)$ और $\left(\frac{5}{2}x - 7\right)$ (iv) $(7a - 9b)$ और $(7a - 9b)$

(v) $(x^2 - y^2)$ और $(x^2 - y^2)$ (vi) $(-ab + bc)$ और $(-ab + bc)$

3. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर मान निकालिए:

(i) $(6x + 7)(6x - 7)$ (ii) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

(iii) $(3a + 7b)(3a - 7b)$ (iv) $(-11x + 12y)(11x + 12y)$

(v) $(-a^2 + b^2)(a^2 + b^2)$ (vi) $(2x^3 + 9y^3)(2x^3 - 9y^3)$

4. किसी सर्वसमिका का प्रयोग कर द्विपद-वर्ग का मान निकालिए और सीधे-सीधे प्रसार द्वारा परिणाम को सत्यापित कीजिए:

(i) $(a - 5)^2$ (ii) $(2a + 7)^2$

(iii) $(3a^2 + 4b)^2$ (iv) $(6x^2 - 5y)^2$

(v) $(-8x^3 + 7y^2)^2$ (vi) $(4m^3 + 11n^3)^2$

5. सामान्यत: गुणा कीजिए और परिणाम की सत्यता किसी सर्वसमिका के प्रयोग से जाँचिए:

(i) $(6x - 8y)(6x + 8y)$ (ii) $(-3a^2 + b^3)(3a^2 + b^3)$

(iii) $\left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{3}{8}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m^2 - \frac{3}{8}n^2\right)$ (iv) $(1.7p^3 + 1.2q^3)(1.7p^3 - 1.2q^3)$

6. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक को त्रिपद के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(a^2 - b^2)^2$ (ii) $(a^3 + b^3)^2$

(iii) $(2x + 3y^3)^2$ (iv) $(7p^3 - 5a^2)^2$

7. सरल कीजिए और एकपदी या द्विपद के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(2x + 5)^2 + (2x - 5)^2$

(ii) $(3p + 8q)^2 + (3p - 8q)^2$

(iii) $(150m + 11n)^2 - (150m - 11n)^2$

(iv) $\left(2r^2 - \frac{1}{400}t^2\right)^2 - \left(2r^2 + \frac{1}{400}t^2\right)^2$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक को एक एकपदी और एक द्विपद के गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$

(ii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^3n^2$

9. एक द्विपद-वर्ग के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $(3x + 7)^2 - 84x$

(ii) $(89p - 5q)^2 + 1780\,pq$

10. किसी उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर मान निकालिए:

(i) 71^2 (ii) 92^2 (iii) 103^2

(iv) 59^2 (v) 99^2 (vi) 991^2

11. दो वर्गों के अंतर के रूप में व्यक्त कर, सरल कीजिए:

(i) 105×95 (ii) 78×82 (iii) 297×303

12. किसी भी वर्ग का मान सीधे निकाले बिना सरल कीजिए:

(i) $51^2 - 49^2$ (ii) $132^2 - 122^2$ (iii) $233^2 - 227^2$

13. a का मान निकालिए, यदि

(i) $8a = 35^2 - 27^2$

(ii) $9a = 76^2 - 67^2$

(iii) $pqa = (3p + q)^2 - (3p - q)^2$

14. नीचे बताए गए आकार के गत्ते के टुकड़े काटकर, उन्हें इस प्रकार आस-पास रखिए कि वर्ग बन जाए:

(i) एक 5×5 वर्गाकार टुकड़ा, एक 6×6 वर्गाकार टुकड़ा और दो 5×6 आयताकार टुकड़े।

(ii) एक 1×1 वर्गाकार टुकड़ा, एक 9×9 वर्गाकार टुकड़ा और दो 9×1 आयताकार टुकड़े।

15. पुराने ग्रीटिंग कार्डों या किसी मोटे कागज से नीचे बताए गए आकार के टुकड़े काटकर उन्हें दो वर्गों के रूप में रखिए:

(i) एक 2×2 वर्गाकार टुकड़ा और दो 6×4 आयताकार टुकड़े।

[संकेत: क्रियाकलाप 2 को फिर से देखिए।]

(ii) एक 3×3 वर्गाकार टुकड़ा और दो 8×5 आयताकार टुकड़े।

याद रखने योग्य बातें

1. दो एकपदियों का गुणनफल उनके गुणांकों के गुणनफल के साथ एकपदियों में आने वाली अक्षर संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है, जबकि प्रत्येक अक्षर संख्या का घातांक एकपदियों में उसके घातांकों का योग होता है।
2. किसी एकपदी को किसी द्विपद से गुणा करने के लिए, हम एकपदी को द्विपद के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं और इस प्रकार प्राप्त गुणनफलों को जोड़ लेते हैं।
3. दो द्विपदों को गुणा करने के लिए, हम एक द्विपद के दोनों पदों को दूसरे द्विपद के दोनों पदों से गुणा कर, प्राप्त (4) गुणनफलों को जोड़ लेते हैं।
4. किसी द्विपद और किसी त्रिपद को गुणा करने के लिए, हम द्विपद के प्रत्येक पद को त्रिपद के प्रत्येक पद से गुणा कर, प्राप्त (6) गुणनफलों को जोड़ लेते हैं।
5. a और b के सभी मानों के लिए,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन

अध्याय 8

8.1 भूमिका

याद कीजिए कि दी गई कई संख्याओं को गुणा कर एक अकेली संख्या प्राप्त की जा सकती है। उदाहरणतः, यदि 2, 3 और 5 दी गई संख्याएँ हों, तो इनके गुणनफल $2 \times 3 \times 5$ से संख्या 30 प्राप्त होती है। दूसरी ओर, एक दी गई संख्या के लिए दो या दो से अधिक ऐसी संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं, जिनका गुणनफल यह दी गई संख्या हो। उदाहरण के लिए, दी गई संख्या यदि 42 हो, तो

$$2 \times 3 \times 7 = 42$$

2, 3 और 7 को 42 के *गुणनखंड* (*factors*), *गुणक* या *अपवर्तक* कहा जाता है, क्योंकि 2, 3 और 7 का गुणनफल (*product*) 42 है।

हम सीख चुके हैं कि दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजकों का गुणनफल कैसे प्राप्त किया जाता है। यह सोचना स्वाभाविक ही होगा कि क्या किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंडों की बात की जा सकती है, और यदि हाँ, तो यह गुणनखंड ज्ञात कैसे किए जाएँगे! इस अध्याय में, बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडों की बात की जाएगी। इस बात की विवेचना भी की जाएगी कि किसी बीजीय व्यंजक का गुणनखंडन कैसे किया जाए, अर्थात् इसके गुणनखंड कैसे ज्ञात किए जाएँ।

8.2 किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड

आइए, गुणनखंड की संकल्पना का विस्तार संख्याओं से बढ़ाकर बीजीय व्यंजकों तक करें। किसी संख्या के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए, हम इसे संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। किसी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड प्राप्त करने के लिए, हम इसे बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे। गुणनफल का प्रत्येक व्यंजक एक अभीष्ट गुणनखंड होगा। गुणनखंड ज्ञात करने की क्रिया *गुणनखंडन* (करना) (*factorisation*) कहलाती है।

दृष्टांत 1: $x(y+z) = x \times (y+z)$

क्योंकि x और $(y+z)$ का गुणनफल $x(y+z)$ है, अतः x और $(y+z)$ व्यंजक $x(y+z)$ के गुणनखंड हैं।

अब $\quad x(y+z) = xy + xz$

क्या xy और xz व्यंजक $x(y+z)$ के गुणनखंड हैं? नहीं। यह xy और xz का *योगफल* है न कि *गुणनफल* जो $x(y+z)$ के बराबर है। अतः xy और xz, $x(y+z)$ के पद (*terms*) हुए, इसके *गुणनखंड* नहीं। इस बात पर ध्यान दीजिए और पद तथा गुणनखंड में अंतर करना सीख लीजिए।

कभी-कभी किसी बीजीय व्यंजक को गुणनफल के रूप में एक से अधिक प्रकार लिखा जा सकता है। समस्त गुणनखंड प्राप्त करने के लिए सभी गुणनफलों पर ध्यान देना होगा। इस कथन को स्पष्ट करने के लिए, एक सरल एकपदी (*monomial*) $3ab$ लेते हैं।

दृष्टांत 2:

$3ab = 1 \times 3ab \quad \therefore$ 1 और $3ab$ दोनों $3ab$ के गुणनखंड हैं।

$3ab = 3 \times ab \quad \therefore$ 3 और ab दोनों $3ab$ के गुणनखंड हैं।

$3ab = 3a \times b \quad \therefore$ $3a$ और b दोनों $3ab$ के गुणनखंड हैं।

$3ab = a \times 3b \quad \therefore$ a और $3b$ दोनों $3ab$ के गुणनखंड हैं।

$3ab = 3 \times a \times b \quad \therefore$ 3, a और b तीनों $3ab$ के गुणनखंड हैं।

फलतः $1, 3, a, b, 3a, 3b, ab$ और $3ab$, सभी $3ab$ के गुणनखंड हैं।

इस प्रकार,

कोई दिया गया बीजीय व्यंजक जिन संख्याओं और बीजीय व्यंजकों का गुणनफल होता है, वे सभी संख्याएँ और बीजीय व्यंजक दिए गए बीजीय व्यंजक के गुणनखंड होते हैं।

अब हम कुछ ऐसी विधियाँ सीखेंगे जिनसे किसी दिए गए बीजीय व्यंजक का गुणनखंडन किया जा सके, यदि इसका अर्थपूर्ण गुणनखंडन संभव हो। याद कीजिए कि अभाज्य संख्याओं 5, 7, 11 आदि का अर्थपूर्ण रूप से गुणनखंडन नहीं किया जा सकता। उदाहरणतः, 5 के गुणनखंड मात्र 1 और 5 ही हैं। अतः, 5 का गुणनखंडन करना अर्थहीन होगा। इसी प्रकार, कुछ बीजीय व्यंजक भी ऐसे होते हैं जिनके गुणनखंड तुच्छ (*trivial*) ही होते हैं।

8.3 एकपदियों के सार्व गुणनखंड

एकपदी $2xy$ के गुणनखंड $1, 2, x, y, 2x, 2y, xy$ और $2xy$ हैं। एकपदी $5x$ के गुणनखंड 1, 5, x और $5x$ हैं। गुणनखंड 1 तुच्छ रूप से प्रत्येक बीजीय व्यंजक का गुणनखंड होता है। इस गुणनखंड पर ध्यान न देते हुए, हम पाते हैं कि x, $2xy$ का गुणनखंड है और $5x$ का भी। यह

$2xy$ और $5x$, दोनों के गुणनखंडों में एक सार्व गुणनखंड है। इस कारण हम x को $2xy$ *और* $5x$ *का सार्व गुणनखंड (common factor) या समापवर्तक कहते हैं।*

दृष्टांत 3: x^2y तथा xy के तुच्छेतर (*non-trivial*) सार्व गुणनखंड x, y और xy हैं।

दृष्टांत 4: 10 pqr और $5q$ के तुच्छेतर सार्व गुणनखंड 5, q और $5q$ हैं।

टिप्पणी: आगे से जब तक अन्यथा न कहा जाए, *गुणनखंड* से तात्पर्य *तुच्छेतर गुणनखंड* होगा।

8.3.1 एकपदियों का महत्तम समापवर्तक

हमने देखा कि दो एकपदियों में कई सार्व गुणनखंड हो सकते हैं। इनमें कुछ तो संख्याएँ हो सकती हैं और कुछ में अक्षर-संख्याएँ हो सकती हैं। उदाहरणत:, $9, x, y, y^2, 9x, 9y, 9y^2, xy, xy^2, 9xy$ और $9xy^2$ एकपदियों $9xy^2z$ और $18x^3y^3$ के सार्व गुणनखंड हैं। ध्यान दीजिए कि इनमें $9xy^2$ में निम्नलिखित गुण हैं:

1. इसका संख्यात्मक (*numeric*) गुणांक दी गई एकपदियों के संख्यात्मक गुणांकों का HCF (महत्तम समापवर्तक) है।

   [ध्यान दीजिए कि $9xy^2z$ और $18x^3y^3$ के संख्यात्मक गुणांक क्रमश: 9 और 18 हैं। 9 और 18 का HCF, 9 है जो $9xy^2$ का संख्यात्मक गुणांक भी है।]

2. इसमें केवल वही अक्षर संख्याएँ आती हैं, जो दी गई दोनों एकपदियों में हैं। इसमें आई प्रत्येक अक्षर संख्या का घातांक दी गई एकपदियों में इस अक्षर संख्या के घातांकों में न्यूनतम है।

   (दी गई एकपदियों की सार्व अक्षर संख्याएँ x और y हैं। $9xy^2$ में केवल यही दोनों आती हैं। $9xy^2z$ और $18x^3y^3$ में x के घातांक क्रमश: 1 और 3 हैं। 1 और 3 में 1 न्यूनतम है। $9xy^2$ में भी x का घातांक 1 है। इसी प्रकार, y के लिए भी ऐसा ही है।)

   इन दो गुणों के कारण

(i) $9xy^2$ दी गई दोनों एकपदियों का गुणनखंड होता है, और

(ii) दी गई एकपदियों का प्रत्येक सार्व गुणनखंड $9xy^2$ का गुणनखंड होता है।

इस कारण $9xy^2$ को हम दी गई एकपदियों $9xy^2z$ और $18x^3y^3$ का *महत्तम समापवर्तक* (*greatest / highest common factor*) कहते हैं। लघु रूप में हम महत्तम समापवर्तक को HCF या GCF कहेंगे।

टिप्पणी: आगे से 'संख्यात्मक गुणांक' के लिए हम पद 'गुणांक' का ही प्रयोग करेंगे।

अभी तक हमने निम्नलिखित क्रियाओं की बात की है:

(i) दी गई एकपदी के गुणनखंड ज्ञात करना, और

(ii) दी गई एकपदियों के सार्व गुणनखंड और उनका महत्तम समापवर्तक या HCF/GCF ज्ञात करना।

इन दो क्रियाओं की सहायता से अब हम किसी भी बीजीय व्यंजक के गुणनखंड ज्ञात करना सीखेंगे। याद कीजिए कि प्रत्येक बीजीय व्यंजक कुछ एकपदियों का योगफल होता है। पहले किसी द्विपद को लेते हैं, जो दो एकपदियों का योगफल होता है। [क्या आप अंतर के विषय में सोच रहे थे? ध्यान दीजिए कि $x-y$ एकपदियों x और $-y$ का योगफल है।]

नीचे दिए गए नियम लाभप्रद सिद्ध होंगे:

नियम 1: $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$

[तात्पर्य यह कि यदि दिया गया द्विपद $a \times .....+ a \times .....$, के रूप में लिखा जा सके, तो उसका गुणनखंडन $a \times (\cdots + \cdots)$ के रूप में किया जा सकता है।]

नियम 2: *दी गई एकपदियों का HCF ज्ञात करने के लिए एक व्यावहारिक नियम:*

चरण 1: दी गई एकपदियों के गुणांकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए।

चरण 2: दोनों ही एकपदियों में आने वाली प्रत्येक अक्षर संख्या का न्यूनतम घातांक ज्ञात कर इस अक्षर संख्या को इस घातांक के साथ लिखिए। [7 जैसे अचर को $7x^0y^0z^0$ .... आदि जानिए।]

चरण 3: चरण 1 का HCF लीजिए और चरण 2 की अक्षर संख्याओं को ज्ञात किए गए (न्यूनतम) घातांकों के साथ लीजिए। इनका गुणनफल अभीष्ट HCF है।

8.4 सार्व गुणनखंड निकालकर गुणनखंडन

अब तक विकसित विचारों को अब उदाहरणों से समझाया जाएगा।

उदाहरण 1: $15x^2y^3 + 12x^3y$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: दिया गया द्विपद, एकपदियों $15x^2y^3$ और $12x^3y$ का योगफल है। $15x^2y^3$ और $12x^3y$ का HCF ज्ञात करने के लिए, हम ऊपर बताए गए व्यावहारिक नियम का प्रयोग करेंगे। इस HCF की सहायता से गुणनखंड ज्ञात किए जाएँगे।

चरण 1: एकपदियों के गुणांक $15\ (=3 \times 5)$ और $12\ (=2^2 \times 3)$ हैं। 15 और 12 का HCF है: $\boxed{3}$

चरण 2: दोनों ही एकपदियों में आने वाली अक्षर संख्याएँ x और y हैं।

(i) $15x^2y^3$ और $12x^3y$ में x के घातांक क्रमशः 2 और 3 हैं। 2 और 3 में 2 छोटा है। अतः, हमें प्राप्त होता है: $\boxed{x^2}$

(ii) y के घातांक 3 और 1 हैं। अतः, हमें प्राप्त होता है: y^1 या $\boxed{y}$

चरण 3: दी गई एकपदियों का HCF चरण 1 और चरण 2 में प्राप्त पदों का गुणनफल है। अत:, $15x^2y^3$ और $12x^3y$ का HCF है: $3 \times x^2 \times y = 3x^2y$ ।

अब दिए गए द्विपद के प्रत्येक पद को दो ऐसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखेंगे, जिनमें से एक $3x^2y$ होगा।

$$15x^2y^3 + 12x^3y = 3x^2y \times 5y^2 + 3x^2y \times 4x$$
$$= 3x^2y\,(5y^2 + 4x) \quad \text{[ऊपर का नियम 1]}$$

अत:, दिए गए द्विपद $15x^2y^3 + 12x^3y$ के दो गुणनखंड $3x^2y$ और $(5y^2 + 4x)$ हैं।

टिप्पणियाँ: 1. जब आपको दो एकपदियों का HCF ज्ञात करने का कुछ अभ्यास हो जाएगा, तब आप ऊपर की क्रिया को संक्षिप्त कर सकेंगे। सोचकर HCF निकालने के बाद सीधे ही प्रत्येक पद को दो गुणनखंडों, जिनमें से एक HCF होगा, के गुणनफल के रूप में लिख लेंगे। ऊपर हल को विस्तार से इसलिए दिया गया कि एक बार क्रिया आपकी समझ में ठीक से आ जाए।

2. यह आवश्यक नहीं कि आप HCF ज्ञात करें और इसे एक गुणनखंड के रूप में बाहर निकालें। आपको दोनों एकपदियों में जो भी गुणनखंड सार्व दिखे, उसे ही बाहर निकाल लें। शेष बचे द्विपद को फिर से जाँचिए। देखिए कि क्या इसके पदों में कोई सार्व गुणनखंड है। यदि हाँ, तो इसे बाहर निकालिए और शेष द्विपद को अगले उदाहरण में बताए अनुसार पुन: जाँचिए।

उदाहरण 2: $20a^2b^3 + 32a^3b^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: द्विपद के दो पद $20a^2b^3$ और $32a^3b^2$ हैं। ध्यान दीजिए कि 2 इन दोनों एकपदियों का एक सार्व गुणनखंड है। a^2 भी इन दोनों पदों में एक सार्व गुणनखंड है। अत:, गुणनखंड $2a^2$ को बाहर निकालते हैं। तब,

$$20a^2b^3 + 32a^3b^2 = 2a^2 \times 10b^3 + 2a^2 \times 16ab^2 \qquad (*)$$

या $$20a^2b^3 + 32a^3b^2 = 2a^2(10b^3 + 16ab^2) \qquad (1)$$

अब हम द्विपद $(10b^3 + 16ab^2)$ के पदों को देखते हैं। पदों $10b^3$ और $16ab^2$ में एक सार्व गुणनखंड $2b^2$ है। अब हम इस गुणनखंड को बाहर निकालते हैं।

$$20a^2b^3 + 32a^3b^2 = 2a^2\,(10b^3 + 16ab^2) \qquad \text{[(1) से]}$$
$$= 2a^2\,(2b^2 \times 5b + 2b^2 \times 8a) \qquad (*)$$
$$= 2a^2\,\{2b^2(5b + 8a)\}$$
$$= 4a^2b^2\,(5b + 8a)$$

अब $5b$ और $8a$ में कोई सार्व गुणनखंड नहीं है। अत:, हम दिए गए व्यंजक का गुणनखंडन जहाँ तक हो सकता था, कर चुके हैं। इस प्रकार,

$$20a^2b^3 + 32a^3b^2 = 4a^2b^2\,(5b + 8a)$$

टिप्पणी: (*) से अंकित चरण महत्त्वपूर्ण हैं। इनमें इस नियम का प्रयोग किया गया है कि समान आधार वाले एकपदियों को गुणा करने के लिए उनके घातांकों का योग किया जाता है:

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

इस नियम से हमने लिखा:

$$a^3 = a^{2+1} = a^2 \times a^1 = a^2 \times a \text{ और } b^3 = b^2 \times b$$

उदाहरण 3: $55a^2 + 22b^2$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दोनों पदों में कोई सार्व अक्षर संख्या नहीं है। अत:, $55a^2$ और $22b^2$ का HCF मात्र गुणांकों 55 और 22 का HCF, अर्थात् 11 है। इस प्रकार,

$$55a^2 + 22b^2 = 11 \times 5a^2 + 11 \times 2b^2$$
$$= 11\,(5a^2 + 2b^2)$$

अत:, अभीष्ट गुणनखंड 11 और $(5a^2 + 2b^2)$ हैं।

टिप्पणी: एक स्थिति और भी जटिल है। उदाहरणत:, $11a^2 + 13b^2$ का गुणनखंडन तो हो ही नहीं सकता। $11a^2 + 13b^2$ को $1 \times (11a^2 + 13b^2)$ लिखना अर्थहीन होगा। गुणनखंडन किया तो इसलिए जाता है कि बीजीय व्यंजक को कुछ सरलतर बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सके।

अब दो से अधिक पदों वाले बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन का मार्ग स्पष्ट हो गया है। दो पदों का HCF ज्ञात करने के स्थान पर, अब हम व्यंजक के सभी पदों का HCF ज्ञात कर लिया करेंगे।

उदाहरण 4: $3ab^2 + 15a^2b^3 + 21a^3b^2$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल: इस व्यंजक में तीन पद $3ab^2, 15a^2b^3$ और $21a^3b^2$ हैं।

चरण 1: व्यंजक के पदों के गुणांक 3, 15 और 21 हैं। इन गुणांकों का HCF स्पष्टतया $\boxed{3}$ है।

चरण 2: पदों में आने वाली अक्षर संख्याएँ a और b हैं। a के घातांक 1, 2 और 3 हैं। इनमें 1 न्यूनतम है। अत:, HCF में एक गुणनखंड $\boxed{a}$ है। b के घातांक 2, 3 और 2 हैं। इनमें न्यूनतम 2 है। अत:, HCF में b वाला पद $\boxed{b^2}$ है।

चरण 3: HCF, $3 \times a \times b^2 = 3ab^2$ है।

अब व्यंजक के तीनों पदों को इस प्रकार पुन: लिखेंगे कि $3ab^2$ प्रत्येक पद का एक गुणनखंड हो। तब,

$$3ab^2 + 15a^2b^3 + 21a^3b^2 = 3ab^2 \times 1 + 3ab^2 \times 5ab + 3ab^2 \times 7a^2$$
$$= 3ab^2\,(1 + 5ab + 7a^2)$$

इस प्रकार, दिए गए व्यंजक के गुणनखंड $3ab^2$ और $(1 + 5ab + 7a^2)$ हैं।

8.5 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखंडन

द्विपदों और त्रिपदों के गुणनखंडन में हमारी पहली क्रिया *व्यंजक के सभी पदों में से सार्व गुणनखंड को बाहर निकालने* की थी। कभी-कभी ऐसा करना संभव नहीं होता, परंतु व्यंजक के पदों को समूहों में बाँटकर प्रत्येक समूह में से एक सार्व गुणनखंड बाहर निकालना संभव होता है। उदाहरण के लिए,

$$xy + y + 2x + 2$$

में से कोई सार्व गुणनखंड नहीं निकाला जा सकता। परंतु पदों को

$$(xy + y) + (2x + 2)$$

के रूप में समूहित कर, पहले समूह में से y, और दूसरे समूह में से 2 को बाहर निकाला जा सकता है। अतः, दिया गया व्यंजक इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$y(x + 1) + 2(x + 1)$$

अब स्थिति रोचक हो जाती है। दोनों समूहों में $(x+1)$ सार्व गुणनखंड है। अतः, व्यंजक को

$$(x + 1) \times y + (x + 1) \times 2$$
$$= (x + 1) \times (y + 2)$$

के रूप में लिखा जा सकता है। देखिए, किसी एकपदी को बाहर निकालने के स्थान पर एक द्विपद को बाहर निकाल लिया गया है। इस प्रकार, व्यंजक दो गुणनखंडों का गुणनफल बन गया है। तो हमने क्या कर डाला? हमने दिए गए व्यंजक का *गुणनखंडन* कर दिया। गुणनखंडन की इस विधि को *समूहन द्वारा गुणनखंडन* करना कहते हैं। यह विधि प्रायः त्रिपदों और चार या चार से अधिक पदों वाले व्यंजकों के गुणनखंडन में लाभप्रद सिद्ध होती है।

उदाहरण 5: $2xy + 6x + y + 3$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: ध्यान दीजिए कि पहले और तीसरे पद में y एक सार्व गुणनखंड है। दूसरे और चौथे पद में 3 एक सार्व गुणनखंड है। अतः, हम पहले और तीसरे पद को एक समूह में, और शेष दो पदों को एक अन्य समूह में डालेंगे। इस प्रकार,

$$2xy + 6x + y + 3 = (2xy + y) + (6x + 3)$$
$$= y(2x + 1) + 3(2x + 1)$$
$$= (2x + 1)(y + 3)$$

टिप्पणी: प्राय:, पदों को कई प्रकार से समूहित किया जा सकता है। ऊपर के उदाहरण में, हम ऐसा भी कर सकते थे:

$$2xy + 6x + y + 3 = (2xy + 6x) + (y + 3)$$
$$= 2x \times (y + 3) + 1 \times (y + 3)$$
$$= (y + 3)(2x + 1)$$
$$= (2x + 1)(y + 3), \text{ पहले की भाँति}$$

8.6 सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन

आपको बताया गया था कि निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ अत्यंत उपयोगी हैं:

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

अब उदाहरणों द्वारा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में इन सर्वसमिकाओं की उपयोगिता दिखाई जाएगी।

उदाहरण 6: $4a^2 - 25$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: दिए गए व्यंजक को दो वर्गों के अंतर के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$4a^2 - 25 = (2a)^2 - (5)^2$$
$$= (2a + 5)(2a - 5) \quad \text{[सर्वसमिका III का प्रयोग करके]}$$

उदाहरण 7: $9p^2 - 16q^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: $$9p^2 - 16q^2 = (3p)^2 - (4q)^2$$
$$= (3p + 4q)(3p - 4q) \quad \text{[सर्वसमिका III द्वारा]}$$

उदाहरण 8: $49m^2 - (2n + 3l)^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: $$49m^2 - (2n + 3l)^2 = (7m)^2 - (2n + 3l)^2$$
$$= \{7m + (2n + 3l)\}\,\{7m - (2n + 3l) \quad \text{[सर्वसमिका III द्वारा]}$$
$$= (7m + 2n + 3l)(7m - 2n - 3l)$$

इस प्रकार, आपने देखा कि *जब भी कोई व्यंजक दो वर्गों का अंतर हो, तब इसका गुणनखंडन सर्वसमिका* III *के प्रयोग द्वारा किया जा सकता है।*

सरलता से गुणनखंडन किए जा सकने वाले व्यंजकों का एक अन्य विशिष्ट स्वरूप है, ऐसा त्रिपद जो किन्हीं दो पदों के वर्गों के योगफल और इन पदों के गुणनफल के दुगुने का योगफल या अंतर हो। दूसरे शब्दों में, हमारा तात्पर्य निम्नलिखित स्वरूप वाले व्यंजकों से है:

$$(a)^2 + (b)^2 + 2 \times a \times b \text{ या } (a)^2 + (b)^2 - 2 \times a \times b$$

उदाहरण 9: $x^2 + 8x + 16$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: दिए गए व्यंजक को पुन: इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + (4)^2 + 2 \times x \times 4$$
$$= (x + 4)^2 \quad \text{[सर्वसमिका I के प्रयोग द्वारा]}$$
$$= (x + 4)\,(x + 4)$$

उदाहरण 10: $9m^2 + 4n^2 - 12\,mn$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल:
$$9m^2 + 4n^2 - 12mn = (3m)^2 + (2n)^2 - 2 \times 3m \times 2n$$
$$= (3m - 2n)^2 \quad \text{[सर्वसमिका II]}$$
$$= (3m - 2n)\,(3m - 2n)$$

उदाहरण 11: $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ का गुणनखंडन कीजिए।

हल: ध्यान दीजिए कि सर्वसमिका II का प्रयोग कर, पहले तीन पदों को हम पुन: $(a - b)^2$ के रूप में लिख सकते हैं। इस प्रकार,

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - (c)^2$$
$$= [(a - b) + c]\,[(a - b) - c] \quad \text{[सर्वसमिका III]}$$
$$= (a - b + c)\,(a - b - c)$$

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित एकपदियों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^2$ और $10xy$ (ii) $21p^2q$ और $49\,pq^2$

(iii) $6a^2b^2c$ और $27abc^2$ (iv) a^3b^2 और $-7b^2$

(v) $5a^2$, $-25a^4$ और $100a$ (vi) $11\,abc^3$, $13a^2b^2c$ और $17abc$

(vii) $2x^3$, $4y^3$ और $6z^3$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के पदों का HCF ज्ञात कीजिए:

(i) $2a^2 + 10a^3 + 20a^4$ (ii) $3x^3y^2 + 9\,x^2y^3 - 12\,x^2y^2$

(iii) $-4a^5 - 16a^3b - 20a^2b^2$ (iv) $4x^2 + 20x + 40$

3. निम्नलिखित द्विपदों का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $7x + 21$ (ii) $6p - 12$

(iii) $a^2 + 2a$ (iv) $10x + 5x^2$

(v) $7a^2 + 2a$ (vi) $3x^2y + 6xy^2$

(vii) $-16m + 20m^3$ (viii) $20p^2q + 10apq$

4. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $2x^3 - 6x^4 - 10x^2$ (ii) $-10a^3b + 20b^3a + 40a^3b^2$

(iii) $10a^3 - 15b^3 + 20c^3$ (iv) $a^3bc + 4ab^3 + 41a^3$

5. निम्नलिखित का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $25a^2 - b^2$ (ii) $49p^2 - 36$

(iii) $4a^4b^4 - 9p^2q^2$ (iv) $a^2b^2 - 9$

(v) $(m + 2n)^2 - 16m^2$

6. किसी व्यंजक के वर्ग के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर गुणनखंडन कीजिए:

(i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $b^2 - 10b + 25$

(iii) $4a^2 - 8a + 4$ (iv) $25x^2 + 30x + 9$

(v) $49a^2 + 84ab + 36b^2$ (vi) $121m^2 - 88mn + 16n^2$

7. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक का गुणनखंडन कीजिए:

(i) $x(x + y) + 9x + 9y$ (ii) $(10xy + 4x) + 5y + 2$

(iii) $(5x^2 - 20x) - 8y + 2xy$ (iv) $(6xy - 4y) + 6 - 9x$

8. गुणनखंडन कीजिए:

(i) $px^2 + qx$ (ii) $16x^7 - 48x^5$

(iii) $7x^2 + 21y^2$ (iv) $50x^2 - 72y^2$

(v) $63x^2 - 112y^2$ (vi) $(p - q)^2 - (p + q)^2$

(vii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$ (viii) $3a^2 - 9a^2b - 27a^3c$

9. गुणनखंडन कीजिए:

(i) $(x^2 + z^2 - 2xz) - y^2$ (ii) $(25a^2 + c^2 + 10ac) - 49b^2$

(iii) $ap^2 + bp^2 + bq^2 + aq^2$ (iv) $(ab + a) + b + 1$

10. जितना कम संभव हो, उतने कम घात वाले गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $m^4 - 256$

(iii) $x^4 - (y + z)^4$ (iv) $x^4 - (x - z)^4$

[**संकेत:** $a^4 = (a^2)^2$, $b^4 = (b^2)^2$ आदि।]

याद रखने योग्य बातें

1. कुछ संख्याओं और बीजीय व्यंजकों को गुणा करने पर जो व्यंजक गुणनफल के रूप में प्राप्त होता है, मूल संख्याएँ और व्यंजक इस गुणनफल के *गुणनखंड* या *गुणक* या *अपवर्तक* कहलाते हैं।
2. कुछ दी गई एकपदियों का महत्तम समापवर्तक (HCF) इन एकपदियों के गुणांकों के HCF और सभी एकपदियों में आने वाली अक्षर संख्याओं की न्यूनतम घातों को गुणा कर प्राप्त किया जाता है।
3. किसी द्विपद का गुणनखंडन, द्विपद के पदों के HCF को बाहर निकालकर किया जा सकता है।
4. तीन या उससे अधिक पदों वाले व्यंजकों का गुणनखंडन कभी-कभी पदों का उपयुक्त समूहन कर, और भिन्न-भिन्न समूहों में से सार्व गुणनखंड बाहर निकालकर किया जा सकता है।
5. कभी-कभी बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन में सर्वसमिकाएँ भी उपयोगी रहती हैं।

एक चर वाले रैखिक समीकरण

अध्याय 9

9.1 भूमिका

पिछली कक्षा में, आपने सीखा कि एक या एक से अधिक अक्षर संख्याओं वाले समता के कथन को *समीकरण* कहते हैं। इन अक्षर संख्याओं को *अज्ञात* या चर कहते हैं। चर का ऐसा प्रत्येक मान जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करे, समीकरण का *हल* या *मूल* कहलाता है। आपने किसी समीकरण को हल करने के कुछ नियम भी सीखे थे। इन नियमों के प्रयोग से आपने एक चर वाले कुछ रैखिक समीकरणों को हल करना सीखा था। इन सभी समीकरणों के हल पूर्णांक थे। इस अध्याय में, इन नियमों का विस्तार एक चर वाले ऐसे रैखिक समीकरणों के हल के लिए किया जाएगा जिनके हल परिमेय संख्याएँ भी हो सकती हैं। हम कुछ शाब्दिक समस्याओं को भी हल करेंगे। इसके लिए पहले इन समस्याओं को समीकरणों के रूप में बदलेंगे और फिर इन समीकरणों को हल करेंगे।

9.2 एक चर वाले रैखिक समीकरणों का हल

आइए, समीकरणों को हल करने के लिए कक्षा VI में सीखे गए नियमों को दोहराएँ। ये नियम निम्नलिखित हैं:

समीकरण के समता चिह्न (=) में कोई अंतर नहीं आता, यदि हम

I. समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ दें।

II. समीकरण के दोनों पक्षों में से समान संख्या घटा दें।

III. समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा कर दें।

IV. समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से भाग कर दें।

इन नियमों का प्रयोग इस प्रकार किया जाता है कि अंत में समीकरण के एक पक्ष में केवल अज्ञात अथवा चर ही रह जाए।

अब इन नियमों के प्रयोग से कुछ समीकरण हल किए जाएँगे।

उदाहरण 1: $4x + \frac{3}{5} = 5$ को हल कीजिए।

हल: $4x + \frac{3}{5} = 5$ (1)

या $4x + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 5 - \frac{3}{5}$ (दोनों पक्षों में से $\frac{3}{5}$ घटा कर और नियम II का प्रयोग करने पर)

या $4x = 5 - \frac{3}{5}$ (2)

या $5 \times 4x = 5 \times 5 - 5 \times \frac{3}{5}$ (दोनों पक्षों को 5 से गुणा कर और नियम III का प्रयोग करने पर)

या $20x = 25 - 3$

या $20x = 22$

या $20x \div 20 = 22 \div 20$ (दोनों पक्षों को 20 से भाग देकर और नियम IV का प्रयोग करने पर)

या $x = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$

जाँच: $x = \frac{11}{10}$ के लिए, $LHS = 4x + \frac{3}{5} = 4 \times \frac{11}{10} + \frac{3}{5} = 5$

और $RHS = 5$

अर्थात्, LHS = RHS हुआ। अत:, $x = \frac{11}{10}$ दिए गए समीकरण का हल या मूल है।

उदाहरण 2: $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} = 6$ को हल कीजिए।

हल: $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} = 6$ (1)

या $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 6 + \frac{5}{2}$ (दोनों पक्षों में $\frac{5}{2}$ जोड़ कर)

या $\frac{x}{3} = 6 + \frac{5}{2}$ (2)

या $\quad 3\times\frac{x}{3}=3\times\left(6+\frac{5}{2}\right)$ (दोनों पक्षों को 3 से गुणा करने पर)

या $\quad x=18+\frac{15}{2}$

या $\quad x=\frac{51}{2}$

इस प्रकार, $x=\frac{51}{2}$ दिए गए समीकरण का हल है।

जाँच: $x=\frac{51}{2}$ के लिए, $\text{LHS}=\frac{51}{2\times3}-\frac{5}{2}$

$$=\frac{17}{2}-\frac{5}{2}=\frac{12}{2}=6$$

और $\quad \text{RHS}=6$

अर्थात्, LHS = RHS हुआ। अतः, $x=\frac{51}{2}$ दिए गए समीकरण का हल है।

टिप्पणी: उदाहरण 1 में, (1) के दोनों पक्षों में से $\frac{3}{5}$ घटाने के प्रभाव पर ध्यान दीजिए। यह स्पष्ट हो जाता है कि LHS का $+\frac{3}{5}$, RHS में $-\frac{3}{5}$ बनकर आ गया है [देखिए (2)]। हम कहते हैं कि $+\frac{3}{5}$ दूसरे पक्ष में $-\frac{3}{5}$ बनकर *पक्षांतरित* (*transposed*) हो गया है। इसी प्रकार, उदाहरण 2 में, (1) के दोनों पक्षों में $\frac{5}{2}$ जोड़ने के प्रभाव पर ध्यान दीजिए। यह देखा जा सकता है कि LHS का $-\frac{5}{2}$, RHS में $+\frac{5}{2}$ बनकर उपस्थित होता है [देखिए (2)]। हम कहते हैं कि $-\frac{5}{2}$ दूसरे पक्ष में $+\frac{5}{2}$ बनकर *पक्षांतरित* हो गया है। इस प्रकार, *किसी पद के पक्षांतरण से तात्पर्य सीधे-सीधे इसका चिह्न बदलकर इसे समीकरण के दूसरे पक्ष में ले जाने से होता है।* दूसरे शब्दों में, पद का + चिह्न दूसरे पक्ष में जाकर – में बदल जाता है और विलोमतः भी।

उदाहरण 3: $3x - 2(2x - 5) = 2(x + 3) - 8$ को हल कीजिए।

हल: यहाँ हम देखते हैं कि x समीकरण के दोनों पक्षों में उपस्थित है। पहले हम दोनों पक्षों के व्यंजकों को सरल करेंगे। हम दोनों पक्षों को *युगपत रूप से* (*simultaneously*) सरल कर सकते हैं। सरलीकरण के बाद, हम समीकरण को हल करने के नियमों का प्रयोग कर सकते हैं। इस प्रकार,

$3x - 2(2x - 5) = 2(x + 3) - 8$

या $3x - 4x + 10 = 2x + 6 - 8$ (दोनों पक्षों को युगपत रूप से सरल करने पर)

या $-x + 10 = 2x - 2$

या $-x - 2x + 10 = -2$ ($2x$ को LHS में पक्षांतरित करने पर)

या $-3x + 10 = -2$

या $-3x = -2 - 10$ (10 को RHS में पक्षांतरित करने पर)

या $-3x = -12$

या $-3x \div (-3) = -12 \div (-3)$ (दोनों पक्षों को -3 से भाग देकर)

या $x = 4$

इस प्रकार, $x = 4$ अभीष्ट हल है।

जाँच: $x = 4$ के लिए, LHS $= 3 \times 4 - 2(2 \times 4 - 5)$

$= 12 - 6 = 6$

और RHS $= 2(4 + 3) - 8$

$= 6$

अतः, LHS = RHS है।

इस प्रकार, $x = 4$ दिए गए समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4: $\frac{6x+1}{2} + 1 = \frac{7x-3}{3}$ को हल कीजिए।

हल: $\frac{6x+1}{2} + 1 = \frac{7x-3}{3}$

या $\frac{6x+1+2}{2} = \frac{7x-3}{3}$ (LHS के व्यंजक का सरलीकरण करने पर)

या $\frac{6x+3}{2} = \frac{7x-3}{3}$

या $6 \times \frac{(6x+3)}{2} = \frac{6 \times (7x-3)}{3}$ (दोनों पक्षों को 2 और 3 के LCM से गुणा करने पर)

या $3(6x+3) = 2(7x-3)$

या $18x + 9 = 14x - 6$ (दोनों पक्षों के व्यंजकों को सरल करने पर)

या $18x - 14x = -6 - 9$ ($14x$ को RHS से LHS में, और 9 को LHS से RHS में पक्षांतरित करने पर)

या $4x = -15$

या $x = -\frac{15}{4}$ (दोनों पक्षों को 4 से भाग देकर)

इस प्रकार, दिए गए समीकरण का हल $x = -\frac{15}{4}$ है।

जाँच: $x = -\frac{15}{4}$ के लिए, LHS $= \frac{6 \times \left(-\frac{15}{4}\right) + 1}{2} + 1$

$$= \frac{-\frac{45}{2} + 1}{2} + 1$$

$$= -\frac{43}{2 \times 2} + 1$$

$$= -\frac{43}{4} + 1$$

$$= -\frac{39}{4}$$

और RHS $= \frac{7 \times \left(\frac{-15}{4}\right) - 3}{3} = \frac{\frac{-105-12}{4}}{3}$

$$= -\frac{117}{12} = -\frac{39}{4}$$

अर्थात्, LHS = RHS है।

अतः, $x = -\frac{15}{4}$ दिए गए समीकरण का हल है।

उदाहरण 5: $0.6x + 0.8 = 0.28x + 1.16$ को हल कीजिए।

हल: $0.6x + 0.8 = 0.28x + 1.16$

या $0.6x - 0.28x + 0.8 = 1.16$ ($0.28x$ को LHS में पक्षांतरित करने पर)

या $0.32x + 0.8 = 1.16$

या $0.32x = 1.16 - 0.8$ ($+ 0.8$ को RHS में पक्षांतरित करने पर)

या $0.32x = 0.36$

या $\frac{0.32x}{0.32} = \frac{0.36}{0.32}$ (दोनों पक्षों को 0.32 से भाग देकर)

या $x = \frac{36}{32}$

या $x = \frac{9}{8}$

इस प्रकार, $x = \frac{9}{8}$ अभीष्ट हल है। आप अपने हल की सत्यता की जाँच उदाहरणों 1 से 4 की भाँति कर सकते हैं।

प्रश्नावली 9.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और हलों की जाँच कीजिए:

1. $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{15}$

2. $5x - 3 = 3x - 5$

3. $3x = 5x - \frac{8}{5}$

4. $\frac{x-8}{3} = \frac{x-3}{5}$

5. $x + 7 - \frac{16x}{3} = 12 - \frac{7x}{2}$

6. $m - \frac{m-1}{2} = 1 - \frac{m-2}{3}$

7. $\frac{6p+1}{3} + 1 = \frac{7p-3}{2}$

8. $\frac{3t-2}{3} + \frac{2t+3}{3} = t + \frac{7}{6}$

9. $3(x-3)=5(2x+1)$

10. $15(y-4)-2(y-9)+5(y+6)=0$

11. $3(5x-7)+2(9x-11)=4(8x-7)-111$

12. $4(3w+2)-5(6w-1)=2(w-8)-6(7w-4)+4w$

13. $0.16(5x-2)=0.4x+7$

14. $0.25\ (4y-3)=0.5y-9$

15. $2.25(2z+8)=5z-3$

16. $x-\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}=15$

17. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$

18. $2x-3\ (x+1)=5x-7$

19. $18y+3y-\frac{3}{5}=21+5y-2y$

20. $\frac{4z-3}{4}-3=\frac{5z-7}{3}-4z-1$

9.3 रैखिक समीकरणों का व्यावहारिक समस्याओं में अनुप्रयोग

बहुत-सी व्यावहारिक समस्याओं में ज्ञात और अज्ञात संख्याओं में कुछ संबंध आते हैं, जिन्हें गणितीय व्यंजकों में व्यक्त किया जा सकता है। कक्षा VI में, हमने ऐसी कुछ समस्याओं को बीजीय व्यंजकों में, और कुछ दशाओं में, समीकरणों में बदलना सीखा था। दी गई समस्या के संगत समीकरण प्राप्त करने के बाद, समस्या का हल हम केवल समीकरण को हल करके प्राप्त कर सकते हैं। ये समस्याएँ प्राय: शब्दों में कही जाती हैं। इसी कारण इन समस्याओं को हम बहुधा *शाब्दिक समस्याएँ* (*word problems*) कहते हैं। कुछ *शाब्दिक समस्याएँ* नीचे दी गई हैं:

(i) दो संख्याओं का योगफल 52 है। यदि एक संख्या दूसरी से 10 अधिक हो, तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(ii) जेकब के पिता की वर्तमान आयु जेकब की आयु की तीन गुनी है। पाँच वर्ष बाद दोनों की आयु का योगफल 70 वर्ष होगा। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

(iii) एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से 8 मी कम है। यदि आयत का परिमाप 56 मी हो, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

किसी शाब्दिक समस्या का हल दो भागों में किया जाता है। पहले भाग में समस्या का सूत्रण करते हैं और समीकरण बनाते हैं। जबकि दूसरे भाग में समीकरण को हल करते हैं। समीकरण का यह हल शाब्दिक समस्या का हल देता है। सूत्रण वाले भाग में निम्नलिखित चरण आते हैं:

चरण 1: समस्या को ध्यान से पढ़िए और इस बात पर ध्यान दीजिए कि क्या दिया गया है और क्या ज्ञात करना है।

चरण 2: अज्ञात को किसी अक्षर जैसे कि x, y, z, u, v, w आदि से व्यक्त कीजिए।

चरण 3: जहाँ तक संभव हो समस्या के कथनों को प्रत्येक चरण / प्रत्येक शब्द अनुसार, गणितीय कथनों में बदलिए।

चरण 4: वह राशियाँ खोजिए जो बराबर हैं। इन राशियों के लिए उपयुक्त व्यंजक लिखकर समीकरण बनाइए।

जहाँ तक दूसरे भाग का संबंध है, आप पहले ही जानते हैं कि किसी समीकरण को कैसे हल किया जाता है। फिर भी, बुद्धिमत्ता इसी में होगी कि यह जाँच लिया जाए कि प्राप्त हल समस्या में दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है या नहीं। अब कुछ उदाहरणों द्वारा ये सभी चरण समझाए जाएँगे।

उदाहरण 6: दो संख्याओं का योगफल 52 है। यदि एक संख्या दूसरी से 10 अधिक हो, तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: पहले समस्या का सूत्रण करते हैं। यहाँ संख्याएँ अज्ञात हैं। माना कि छोटी संख्या x है।

अतः, दूसरी संख्या $x + 10$ है।

अब दोनों संख्याओं का योगफल $= x + (x + 10) = 2x + 10$

समस्या के अनुसार, यह योगफल 52 है।

$\therefore \qquad 2x + 10 = 52$

अब सूत्रण वाला भाग पूरा हुआ। अब इस समीकरण, अर्थात् $2x + 10 = 52$ को हल करेंगे।

अब $\qquad 2x + 10 = 52$

या $\qquad 2x = 52 - 10 \qquad$ (10 को RHS में पक्षांतरित करने पर)

या $\qquad 2x = 42$

या $\qquad x = \frac{42}{2} \qquad$ (दोनों पक्षों को 2 से भाग देकर)

या $\qquad x = 21$

x के इस मान से शाब्दिक समस्या का हल इस प्रकार प्राप्त किया जाएगा:

छोटी संख्या 21 है और दूसरी $21 + 10 = 31$ है।

इस प्रकार, दोनों संख्याएँ 21 और 31 हैं।

जाँच: $21 + 31 = 52$, अर्थात् संख्याओं का योगफल 52 है।

साथ ही, $31 - 21 = 10$, अर्थात् 31, 21 से 10 अधिक है।

उदाहरण 7: जेकब के पिता की वर्तमान आयु जेकब की आयु की तीन गुनी है। पाँच वर्ष बाद दोनों की आयु का योगफल 70 वर्ष होगा। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि जेकब की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

अतः, उसके पिता की वर्तमान आयु $= 3x$ वर्ष

अब 5 वर्ष बाद उनकी आयु निम्न होंगी:

जेकब: $(x + 5)$ वर्ष

और जेकब के पिता: $(3x + 5)$ वर्ष

अतः, 5 वर्ष बाद उनकी आयु का योगफल $= (x + 5)$ वर्ष $+ (3x + 5)$ वर्ष $= (4x + 10)$ वर्ष

समस्या के अनुसार, यह योगफल 70 वर्ष है।

अतः, $4x + 10 = 70$

या $4x = 70 - 10$

या $4x = 60$

या $x = \frac{60}{4} = 15$

इस प्रकार, जेकब की वर्तमान आयु = 15 वर्ष

और जेकब के पिता की वर्तमान आयु $= 3 \times 15$ वर्ष = 45 वर्ष

जाँच: 45, 15 का तीन गुना है। अर्थात् जेकब के पिता की आयु जेकब की आयु की तीन गुनी है। पाँच वर्ष बाद जेकब की आयु (15 + 5) वर्ष = 20 वर्ष होगी और जेकब के पिता की आयु (45 + 5) वर्ष = 50 वर्ष होगी।

दोनों की आयु का योगफल (20 + 50) वर्ष = 70 वर्ष होगा। ऐसा ही समस्या में बताया भी गया है।

उदाहरण 8: मेरे पास कुछ पाँच रुपए वाले और कुछ दो रुपए वाले सिक्के हैं। दो रुपए वाले सिक्कों की संख्या पाँच रुपए वाले सिक्कों की संख्या की चार गुनी है। यदि मेरे पास कुल 117 रु हों, तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पाँच रुपए वाले सिक्कों की संख्या x है।

$\therefore$ दो रुपए वाले सिक्कों की संख्या $= 4x$

$\therefore$ कुल राशि $= (x \times 5 + 4x \times 2)$ रु

$= 13x$ रु

किंतु यह राशि 117 रु दी गई है।

अत:, $13x = 117$

या $x = \dfrac{117}{13}$

या $x = 9$

इस प्रकार, 5 रु वाले सिक्कों की संख्या = 9

और 2 रु वाले सिक्कों की संख्या $= 4 \times 9 = 36$

जाँच: 36, 9 का चार गुना है।

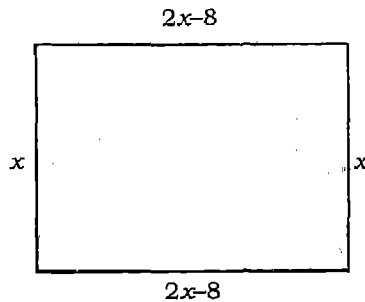
और फिर कुल राशि $= (9 \times 5 + 36 \times 2)$ रु

$= (45 + 72)$ रु $=$ 117 रु

ऐसा ही समस्या में बताया भी गया है।

उदाहरण 9: एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से 8 मी कम है। यदि आयत का परिमाप 56 मी हो, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि आयत की (मीटरों में) चौड़ाई $= x$ (आकृति 9.1)।

$\therefore$ (मीटरों में) उसकी लंबाई $= 2x - 8$

आकृति 9.1

अतः, आयत का परिमाप $= (2x - 8 + x + 2x - 8 + x)$ मी

$= (6x - 16)$ मी

किंतु परिमाप 56 मी बताया गया है।

$\therefore \quad 6x - 16 = 56$

या $\quad 6x = 56 + 16$

या $\quad 6x = 72$

या $\quad x = \dfrac{72}{6}$

या $\quad x = 12$

इस प्रकार, आयत की चौड़ाई = 12 मी

और लंबाई $= (2x - 8)$ मी $= (2 \times 12 - 8) = 16$ मी

जाँच: लंबाई $= (2 \times 12 - 8)$ मी = 16 मी और परिमाप $= 2(16 + 12)$ मी = 56 मी है, जैसा कि समस्या में दिया भी गया है।

उदाहरण 10: मधुमक्खियों के झुंड का पाँचवाँ भाग कदंब के फूल पर बैठ गया और तीसरा भाग सिलिंध्री के एक फूल पर। इन संख्याओं के अंतर का तीन गुना उड़कर कुटज के फूल पर जा बैठा। बची हुई एक मधुमक्खी चमेली और पंदानस की आनंददायक सुगंध से मोहित हो हवा में इधर-उधर भिनभिनाती हुई चक्कर काटने लगी। हे सुंदरी! मधुमक्खियों की संख्या तो बताओ।

हल: माना कि मधुमक्खियों की संख्या x है।

$\therefore$ कदंब पर बैठी मधुमक्खियों की संख्या $= \dfrac{x}{5}$

और सिलिंध्री पर बैठी मधुमक्खियों की संख्या $= \dfrac{x}{3}$

$\therefore$ उड़कर कदंब और सिलिंध्री पर जा बैठी मधुमक्खियों की संख्याओं का अंतर

$$= \frac{x}{3} - \frac{x}{5} \qquad \left(\frac{x}{3} > \frac{x}{5}\right)$$

$\therefore$ कुटज पर जा बैठी मधुमक्खियों की संख्या $= 3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right)$

$$= x - \frac{3x}{5}$$

$$= \frac{2x}{5}$$

मधुमक्खियों की कुल संख्या = कदंब पर बैठी मधुमक्खियाँ + सिलिंध्री पर बैठी मधुमक्खियाँ + कुटज पर बैठी मधुमक्खियाँ + 1 (बची हुई)

या $$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + 1$$

या $$x = \frac{3x + 5x + 6x + 15}{15}$$

या $$15x = 14x + 15$$

या $$x = 15$$

अत:, मधुमक्खियों की संख्या 15 थी।

जाँच: $15 - \left[\frac{15}{5} + \frac{15}{3} + 3\left(\frac{15}{3} - \frac{15}{5}\right)\right] = 15 - [3 + 5 + 3\,(5 - 3)] = 15 - (8 + 6) = 1,$

और यही समस्या में दिया भी है।

प्रश्नावली 9.2

1. किसी संख्या के दुगुने में 7 जोड़ने पर 49 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी संख्या के तिगुने में से 22 घटाने पर 68 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
3. वह संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे 7 से गुणा कर 3 घटाने पर 53 प्राप्त हो।
4. दो संख्याओं का योगफल 95 है। यदि एक संख्या दूसरी से 3 अधिक हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. तीन क्रमागत पूर्णांकों का योगफल 24 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
6. सुब्रमन्यम की माता की वर्तमान आयु सुब्रमन्यम की आयु की छ: गुनी है। पाँच वर्ष बाद उसकी आयु सुब्रमन्यम की आयु से 20 वर्ष अधिक होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. किसी आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई से 4 मी अधिक है। यदि आयत का परिमाप 84 मी हो, तो आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

8. 15 वर्ष बाद शीला की आयु उसकी वर्तमान आयु की चौगुनी हो जाएगी। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

9. 3000 रु की राशि 63 पुरस्कारों के रूप में दी जानी है। प्रत्येक पुरस्कार यदि 100 रु का हो या 25 रु का हो, तो प्रत्येक प्रकार के पुरस्कारों की संख्या ज्ञात कीजिए।

10. एक पर्स में 250 रु की राशि 10-10 और 50-50 रुपए के नोटों में है। यदि 10 रुपए वाले नोटों की संख्या 50 रुपए वाले नोटों की संख्या से 1 अधिक हो, तो प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

11. एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से 2 सेमी अधिक है। यदि आयत का परिमाप 28 सेमी हो, तो आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

12. एक संख्या को दो ऐसे भागों में बाँटा गया कि एक भाग दूसरे से 10 अधिक है। इन भागों का अनुपात 5 : 3 है। संख्या तथा उसके दोनों भाग ज्ञात कीजिए।

13. 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, बालिकाओं की संख्या बालकों की संख्या का $\frac{2}{5}$ है। कक्षा में बालकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. 200 व्यक्तियों में 50000 रु की राशि पुरस्कारों के रूप में बाँटी जानी है। पुरस्कार या तो 500 रु का है या 100 रु का है। प्रत्येक प्रकार के पुरस्कारों की संख्या ज्ञात कीजिए।

15. शांति लाल ने अपनी संपत्ति का पाँचवाँ भाग पुत्र के लिए, पाँचवाँ भाग पुत्री के लिए और शेष अपनी पत्नी के लिए छोड़ा। यदि पत्नी के भाग की संपत्ति का मूल्य 288000 रु हो, तो शांति लाल की कुल संपत्ति का मूल्य ज्ञात कीजिए।

16. यदि किसी संख्या में से $\frac{1}{2}$ घटा कर अंतर को 4 से गुणा करने पर 5 प्राप्त होता हो, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

17. अमरजीत के पास भूमि का एक आयताकार टुकड़ा है जिसके चारों ओर बाड़ लगाने में 300 मी तार लगा। यदि भूमि के इस टुकड़े की लंबाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी हो, तो उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए।

18. हमीदा के पास अलग-अलग फलों की तीन पेटियाँ हैं। पेटी A, पेटी B से $2\frac{1}{2}$ किग्रा अधिक भारी है और पेटी C, पेटी B से $10\frac{1}{4}$ किग्रा अधिक भारी है। यदि तीनों पेटियों का कुल भार $48\frac{3}{4}$ किग्रा हो, तो पेटी A का भार ज्ञात कीजिए।

19. सरिता और जूली एक ही स्थान से विपरीत दिशाओं में चलना आरंभ करती हैं। यदि जूली $2\frac{1}{2}$ किमी / घंटा और सरिता 2 किमी / घंटा की चाल से चले, तो कितने समय में वे एक-दूसरे से 18 किमी दूर होंगी?

20. हिरनों के झुंड में से एक-चौथाई वन में चले गए और एक-तिहाई एक मैदान में चरते रहे। शेष 15 नदी के तट पर पानी पीने लगे। हिरनों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. चर का कोई भी मान, जो समीकरण को संतुष्ट करे, समीकरण का हल या मूल कहलाता है।

2. समीकरण के समता चिह्न में कोई अंतर नहीं आता, यदि हम समीकरण के दोनों पक्षों

(i) में समान संख्या जोड़ दें।

(ii) में से समान संख्या घटा दें।

(iii) को समान शून्येतर संख्या से गुणा कर दें।

(iv) को समान शून्येतर संख्या से भाग दे दें।

3. किसी पद के पक्षांतरण से तात्पर्य होता है, पद का चिह्न बदलकर उसे दूसरे पक्ष में ले जाना।

4. किसी शाब्दिक समस्या को हल करने के लिए, अज्ञात को किसी चर से व्यक्त कर, समस्या के कथनों को प्रत्येक चरण / प्रत्येक शब्द अनुसार गणितीय कथन अर्थात् समीकरण में बदलिए और तब इस समीकरण को हल कीजिए।

अतीत के झरोखे से

बीजगणित, अर्थात् '*algebra*' शब्द *Aljebar w'al almuqabalah* नामक पुस्तक के शीर्षक से लिया गया है। यह पुस्तक लगभग 825 ई. में बगदाद निवासी एक अरब गणितज्ञ *मोहम्मद इब्न अलख्वारिज़्मी* ने लिखी थी। वास्तव में, यह पुस्तक भारतीय गणितज्ञों के कार्य पर आधारित थी। सर्वप्रथम बीजगणित के क्रमबद्ध अध्ययन का श्रेय भारतीय गणितज्ञों को ही जाता है। गणित के विख्यात इतिहासविद् *हरमन हैंकल* (*Hermann Hankel*) ने लिखा है:

"यदि बीजगणित से तात्पर्य हर प्रकार की जटिल राशियों पर अंकगणितीय संक्रियाओं के अनुप्रयोग से है ...., तो बीजगणित के वास्तविक आविष्कारक हिंदुस्तान के विद्वान ब्राह्मण हैं।"

ऐसे संकेत मिलते हैं कि ईसा से लगभग 800 वर्ष पूर्व बेबीलोनवासियों और मिस्त्रवासियों को बीजगणित का कुछ ज्ञान था। बेबीलोनवासी अज्ञात का प्रयोग करते थे। यूनान में *डायोफैंटस* (*Diophantus,* 250 ई.) ने *अनिर्धार्य* (*indeterminate*) *समीकरणों* पर कुछ कार्य किया था।

परंतु सही अर्थों में बीजगणित की कहानी भारत में आर्यभट (जन्म 476 ई.) के साथ आरंभ होती है।

इस तथ्य की महत्ता सबसे पहले आर्यभट ने समझी कि एक सी गणितीय समस्याओं को एक सामान्य विधि से एक साथ ही हल किया जा सकता है। (उदाहरण के लिए, $ax + b = 0$ को हल करने से *समस्त* रैखिक समीकरणों का हल मिल जाता है।) यही बीजगणित का मंत्र है। इसी के कारण बीजगणित, दशमलव पद्धति के बाद, गणित का सबसे अधिक उपयोगी अस्त्र है। इस प्रकार, जहाँ डायोफैंटस तीन समीकरणों को तीन समस्याओं के रूप में हल करते थे, वहाँ आर्यभट तीनों को *एक ही* समस्या के रूप में हल करते थे।

आर्यभट के बाद उनके कार्य को *ब्रह्मगुप्त* ने आगे बढ़ाया। *ब्रह्मगुप्त* को यह कार्य करने में सुविधा हुई ऋण संख्याओं, शून्य और भिन्नों से (जो आर्यभट के समय में उपलब्ध नहीं थीं)। समीकरणों को हल करने की उनकी विधि ठीक वर्तमान विधि जैसी थी। उन्होंने एक ऐसा समीकरण [*पैल* (*Pell*) समीकरण के नाम से प्रसिद्ध एक द्विघात

अनिर्धार्य समीकरण] भी हल किया, जो कई शताब्दियों के बाद *फर्मा* (*Fermat*) ने एक चुनौती के रूप में प्रस्तुत किया, और जिसे *ब्रूंकर* (*Brouncker*) ने ब्रह्मगुप्त की भाँति हल किया। ब्रह्मगुप्त ने बहुत-सी ज्यामितीय समस्याओं को भी बीजगणित की सहायता से हल किया।

भारत में बीजगणित के स्वर्ण-युग की समाप्ति हुई *भास्कर* (1114 ई.) के साथ, जिन्होंने संकेतों के प्रयोग की महत्ता समझी। यों तो *एहम्स पेपिरस* (*Ahme's Papyrus*), जो ईसा से लगभग 1550 वर्ष पूर्व लिखा गया एक भोजपत्र है, में अज्ञात संख्या को ढेरी के अर्थ वाले शब्द *hau* से व्यक्त किया गया है, फिर भी अज्ञात संख्याओं के लिए *एक वर्ण* (*अक्षर*) के प्रयोग का श्रेय भारतीयों को ही जाता है। उन्होंने रंगों जैसे काला, नीला, पीला आदि के प्रथम वर्णों *का, नी, पी* आदि का प्रयोग किया। इन वर्णों का प्रयोग और इनको विभिन्न घातांकों के साथ लेने की विधि भारत में सामान्य बात थी।

त्रिभुजों के विषय में कुछ और

अध्याय 10

10.1 भूमिका

त्रिभुजों और उनके कुछ गुणों के बारे में आप कक्षा VI में पढ़ चुके हैं। उदाहरणार्थ, आप जानते हैं कि

(i) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

(ii) त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों अभिमुख अंत: कोणों के योग के बराबर होता है।

(iii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

हम भुजाओं तथा कोणों के आधार पर त्रिभुजों के वर्गीकरण के बारे में भी पढ़ चुके हैं। त्रिभुजों के बहुत से रोचक गुण हैं। इनमें से एक गुण, जो भुजाओं एवं सम्मुख कोणों से संबंधित है, इस प्रकार है: "एक त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।" इस कथन का विलोम भी सत्य है। इसी प्रकार का एक अन्य गुण समकोण त्रिभुज से संबंधित है। त्रिभुजों से जुड़ा एक और महत्त्वपूर्ण गुण कुछ रेखाखंडों के *संगामी* (*concurrent*) होने से है। इस अध्याय में, हम इन सभी गुणों का अध्ययन करेंगे। इन गुणों का सत्यापन हम त्रिभुज की रचनाओं के क्रियाकलापों द्वारा करेंगे। इसलिए हम पहले कुछ भुजाओं तथा कोणों के आधार पर त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे।

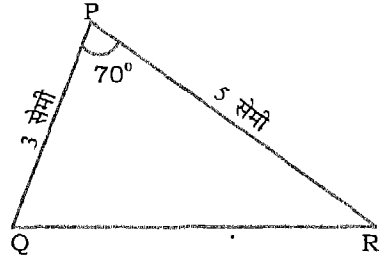
10.2 त्रिभुजों की रचना

दिए हुए मापों के आधार पर किसी त्रिभुज की रचना करने से पूर्व, हमें उस त्रिभुज की एक अनुमानित आकृति बनाकर त्रिभुज की दी हुई मापें दर्शानी चाहिए। इससे वास्तविक त्रिभुज की रचना में प्रयुक्त विभिन्न चरणों को समझने में आसानी होगी।

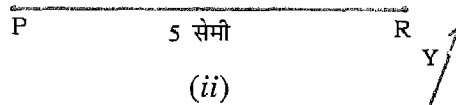
10.2.1 त्रिभुज की रचना जबकि उसकी दो भुजाएं और उनके बीच का कोण दिया हो (SAS त्रिभुज रचना)

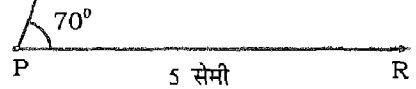
दिया है: एक त्रिभुज PQR की दो भुजाओं की लंबाइयाँ PR = 5 सेमी, PQ = 3 सेमी तथा उनके बीच का कोण $\angle P = 70°$ ।

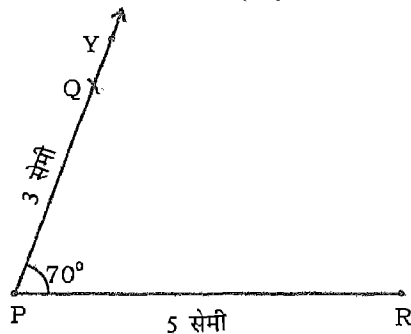
रचना करनी है: त्रिभुज PQR की, जिसकी दो भुजाएँ तथा उनके अंतर्गत कोण दिया है।

पहले हम त्रिभुज PQR की हाथ से अनुमानित आकृति बनाकर दी हुई मापों को दर्शाते हैं [आकृति 10.1 (i)]।

(*i*)

रचना के चरण:

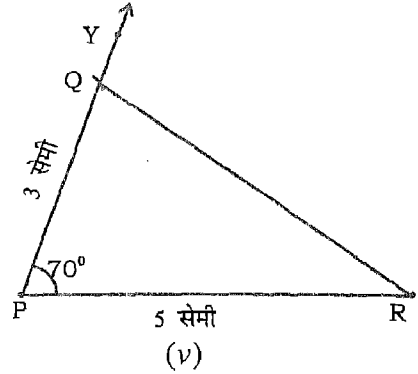
1. 5 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड PR खींचिए [आकृति 10.1(ii)]।

(*ii*)

2. बिंदु P पर चाँदे की सहायता से 70° का कोण YPR बनाइए [आकृति 10.1 (iii)]।

(*iii*)

3. किरण PY से 3 सेमी का रेखाखंड PQ काटिए [आकृति 10.1 (iv)]।

(*iv*)

4. QR को जोड़िए [आकृति 10.1 (v)]।

इस प्रकार, प्राप्त त्रिभुज PQR ही वांछित त्रिभुज है।

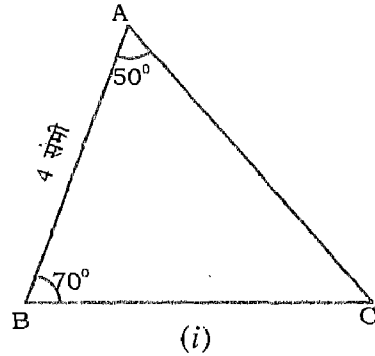
(v)

आकृति 10.1

10.2.2 त्रिभुज की रचना जबकि उसके दो कोण और उनके बीच की भुजा दी हुई हो (ASA त्रिभुज रचना)

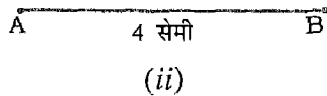
दिया है: त्रिभुज ABC के दो कोण $\angle A = 50°, \angle B = 70°$ तथा इनके बीच की भुज AB = 4 सेमी।

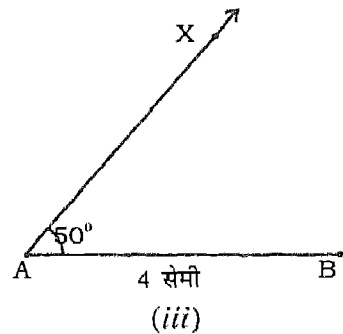
रचना करनी है: एक त्रिभुज की, जिसके दो कोण तथा बीच की भुजा ज्ञात है।

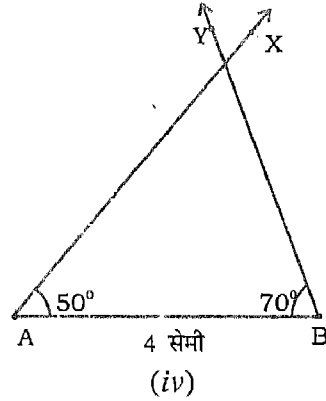
पहले ΔABC की अनुमानित आकृति हाथ से बनाकर दी गई मापों को दर्शाते हैं [आकृति 10.2 (i)]।

(i)

रचना के चरण:

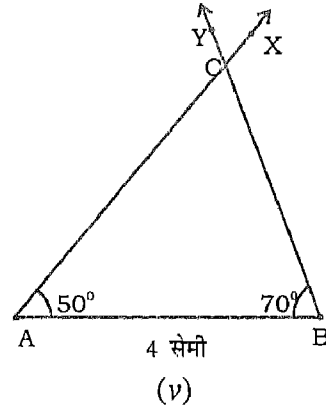
1. 4 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड खींचिए [आकृति 10.2 (ii)]।

(ii)

2. चाँदे की सहायता से A पर $\angle XAB = 50°$ बनाइए [आकृति 10.2 (iii)]।

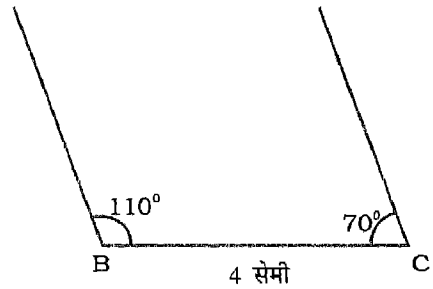
(iii)

3. बिंदु B पर चाँदे की सहायता से $\angle YBA = 70°$ बनाइए [आकृति 10.2(iv)]।

(iv)

4. AX तथा BY का प्रतिच्छेद बिंदु C ज्ञात कीजिए [आकृति 10.2(v)]।

इस प्रकार, प्राप्त त्रिभुज ABC ही वांछित त्रिभुज है।

(v)

आकृति 10.2

उदाहरण 1: एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 4 सेमी, $\angle B = 110°$ तथा $\angle C = 70°$ है।

हल: त्रिभुज बनाने से पूर्व त्रिभुज की एक अनुमानित आकृति हाथ से बनाते हैं। अनुमानित आकृति बनाते समय (आकृति 10.3), हम पाते हैं कि इस त्रिभुज को बनाना संभव नहीं है। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

आकृति 10.3

याद कीजिए कि कक्षा 6 में आपने त्रिभुज के कोणों के योग के बारे में क्या पढ़ा था। इस गुण के अनुसार ΔABC में,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

परंतु, जैसा दिया है,

$$\angle B + \angle C = 180^\circ$$

अर्थात्

$$\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$$

इसलिए, इस त्रिभुज की रचना असंभव है।

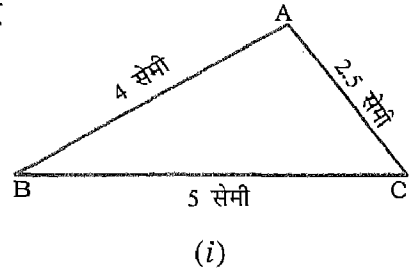
टिप्पणी: ASA त्रिभुज रचना करने से पूर्व, यह जाँच आवश्यक है कि दिए हुए दोनों कोणों का योग 180° से कम होना चाहिए। यदि यह प्रतिबंध संतुष्ट नहीं है, तो अभीष्ट त्रिभुज की रचना असंभव है।

10.2.3 त्रिभुज की रचना करना जब उसकी तीनों भुजाएँ दी हुई हों (SSS त्रिभुज रचना)

दिया है: एक त्रिभुज की भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी तथा 2.5 सेमी हैं।

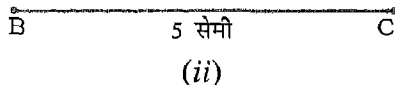
रचना करनी है: दी हुई भुजाओं वाले त्रिभुज की।

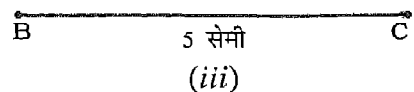
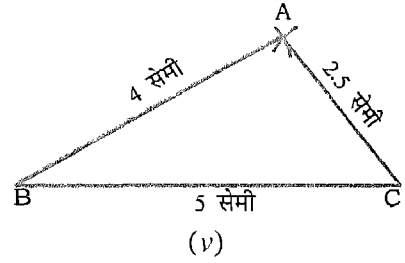
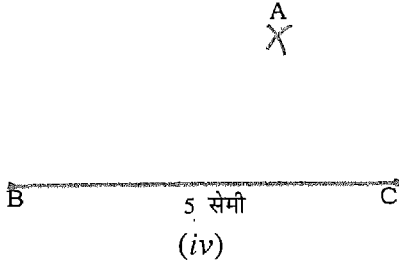
पहले हम हाथ द्वारा अनुमानित त्रिभुज ABC बनाकर इसकी भुजाएँ दर्शाते हैं [आकृति 10.4(i)]।

(*i*)

रचना के चरण:

1. रेखाखंड BC = 5 सेमी खींचिए [आकृति 10.4(ii)]।

B 5 सेमी C

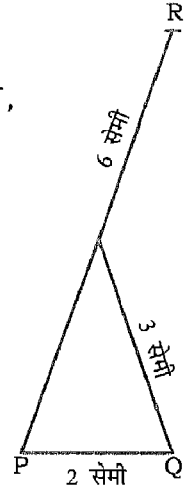
(*ii*)

2. B को केंद्र मानकर तथा 4 सेमी (=AB) त्रिज्या लेकर वृत्त का एक चाप खींचिए [आकृति 10.4(iii)]।

(*iii*)

3. C को केंद्र मानकर तथा 2.5 सेमी (=AC) त्रिज्या लेकर वृत्त का एक चाप खींचिए जो पहले चाप को बिंदु A पर काटे [आकृति 10.4(iv)]।

आकृति 10.4

4. A को बिंदुओं B और C से जोड़िए [आकृति 10.4(v)]।

इस प्रकार, प्राप्त ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।

उदाहरण 2 : त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जहाँ PQ = 2 सेमी, QR = 3 सेमी तथा PR = 6 सेमी है।

हल : अभीष्ट रचना से पहले हम ΔPQR की एक अनुमानित आकृति हाथ से बनाते हैं। अनुमानित आकृति (आकृति 10.5) बनाते समय, हम पाते हैं कि इस त्रिभुज की रचना संभव नहीं है। क्या आप बता सकते हैं क्यों? याद कीजिए कि आपने कक्षा 6 में त्रिभुजीय असमिका के बारे में पढ़ा था। इसके अनुसार, त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

आकृति 10.5

क्योंकि इस त्रिभुज में दो भुजाओं PQ (= 2 सेमी) तथा QR (= 3 सेमी) का योग तीसरी भुजा PR (= 6 सेमी) से छोटा है, अर्थात्

$$PQ + QR < PR \text{ है,}$$

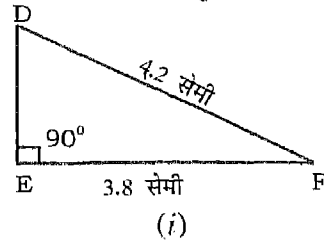
इसलिए त्रिभुज की दी हुई तीनों भुजाएँ त्रिभुजीय असमिका को संतुष्ट नहीं करतीं। अतः, अभीष्ट त्रिभुज की रचना अंसभव है।

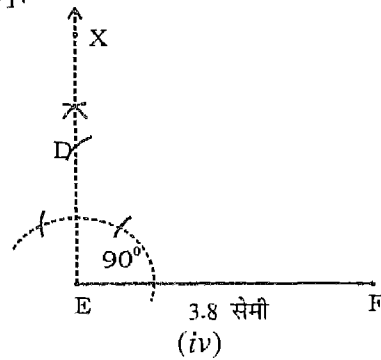
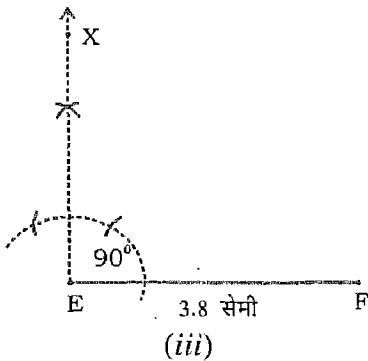
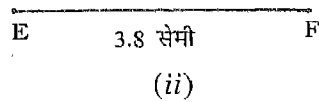
टिप्पणी : जब भी तीन दी हुई भुजाओं वाले त्रिभुज की रचना करनी है, अर्थात् SSS प्रतिबंध के अंतर्गत त्रिभुज की रचना करनी हो, तो यह देख लेना चाहिए कि क्या भुजाओं की लंबाइयाँ त्रिभुजीय असमिका के प्रतिबंध को संतुष्ट करती हैं या नहीं।

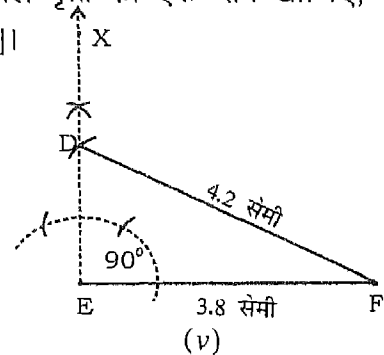
10.2.4 समकोण त्रिभुज की रचना जब कर्ण एवं एक भुजा दिए हुए हों (RHS त्रिभुज रचना)

दिया है: एक समकोण त्रिभुज DEF का कर्ण DF = 4.2 सेमी, $\angle E = 90^\circ$ तथा EF = 3.8 सेमी।

रचना करनी है: एक समकोण त्रिभुज की, जबकि इसका कर्ण एवं एक भुजा ज्ञात है।

हम पहले हाथ से ΔDEF की अनुमानित आकृति बनाते हैं तथा इसके कर्ण एवं भुजा को इंगित करते हैं [आकृति 10.6(i)]।

रचना के चरण:

1. एक रेखाखंड EF = 3.8 सेमी लंबा खींचिए [आकृति 10.6(ii)]।
2. E पर $\angle XEF = 90^\circ$ बनाइए [आकृति 10.6(iii)]।

3. F को केंद्र मानकर 4.2 सेमी (अर्थात् कर्ण) त्रिज्या वाले वृत्त का एक चाप खींचिए, जो किरण EX को D पर काटता है [आकृति 10.6(iv)]।
4. DF को जोड़िए [आकृति 10.6(v)]।

इस प्रकार, प्राप्त ΔDEF ही अभीष्ट त्रिभुज है।

आकृति 10.6

प्रश्नावली 10.1

1. एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 70^\circ$, $AB = 4.8$ सेमी एवं $BC = 5.2$ सेमी हो।
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें $YZ = XZ = 4.3$ सेमी तथा $\angle Z = 80^\circ$ हो।
3. एक त्रिभुज DEF की रचना कीजिए जिसमें $DE = 5$ सेमी, $DF = 4$ सेमी तथा $\angle D = 50^\circ$ हो।
4. एक त्रिभुज PQR बनाइए जिसमें $PQ = 4.5$ सेमी, $QR = 4$ सेमी तथा $\angle Q = 90^\circ$ हो।
5. एक ΔABC खींचिए जिसमें $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 50^\circ$ तथा $BC = 5.1$ सेमी हो।
6. एक ΔDEF बनाइए जिसमें $\angle D = 100^\circ$, $\angle E = 60^\circ$ एवं $DE = 5.4$ सेमी हो।
7. एक ΔXYZ की रचना कीजिए जिसमें $YZ = 4$ सेमी, $\angle Y = 110^\circ$ तथा $\angle X = 30^\circ$ हो। [*संकेत:* $\angle Z$ प्राप्त कीजिए।]
8. एक ΔPQR की रचना कीजिए जिसमें $PQ = 5$ सेमी, $\angle P = 40^\circ$ तथा $\angle R = 45^\circ$ हो।
9. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4.5$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $CA = 6$ सेमी हो।
10. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 4.5 सेमी हो।
11. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें $PQ = PR = 4.2$ सेमी एवं $QR = 3.6$ सेमी हो।
12. एक ΔLMN खींचिए जहाँ $LM = 5$ सेमी, $MN = 5.6$ सेमी एवं $NL = 4.2$ सेमी हो।
13. नीचे त्रिभुज के कुछ कोणों एवं भुजाओं के माप दिए हैं। इनमें से किन त्रिभुजों की रचना संभव नहीं है और क्यों? शेष त्रिभुजों की रचना कीजिए।

    (i) $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 115^\circ$, $AB = 5$ सेमी।

    (ii) $\angle Q = 30^\circ$, $\angle R = 60^\circ$, $QR = 4.7$ सेमी।

    (iii) $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $AC = 3$ सेमी।

    (iv) $\angle L = 95^\circ$, $\angle N = 100^\circ$, $LM = 5$ सेमी।

    (v) $AB = 4$ सेमी, $BC = 2$ सेमी, $CA = 2$ सेमी।

    (vi) $PQ = 3.5$ सेमी, $QR = 4$ सेमी, $PR = 3.5$ सेमी।

    (vii) $XY = 3$ सेमी, $YZ = 4$ सेमी, $XZ = 5$ सेमी।

    (viii) $DE = 4.5$ सेमी, $EF = 5.5$ सेमी, $DF = 4$ सेमी।

14. एक समकोण त्रिभुज खींचिए जिसका कर्ण 5 सेमी लंबा तथा एक भुजा 3 सेमी लंबी हो।

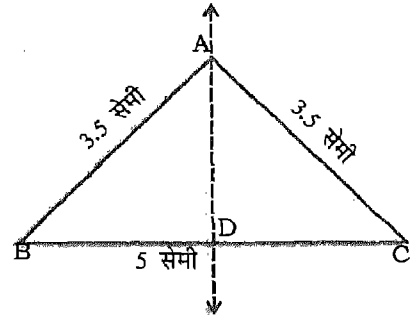
15. एक समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $\angle B = 90°$, AB = 3 सेमी तथा BC = 6.4 सेमी हो।

16. एक समकोण त्रिभुज PQR बनाइए जिसमें $\angle Q = 90°$, PR = 6 सेमी एवं QR = 4 सेमी हो।

17. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $\angle C = 90°$ तथा BC = AC = 4 सेमी हो।

10.3 समद्विबाहु त्रिभुज के गुण

हम जानते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर होती हैं। इन बराबर भुजाओं के सम्मुख कोणों के बारे में आप क्या सोचते हैं? क्या ये कोण भी बराबर हैं? आइए क्रियाकलापों द्वारा इसका सत्यापन करें।

क्रियाकलाप 1: एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें AB = AC = 3.5 सेमी तथा BC = 5 सेमी हो। ΔABC का *अक्स कागज* (*tracing paper*) पर एक *अक्स* उतारिए। इस कागज को इस प्रकार मोड़िए कि भुजा AC भुजा AB पर पड़े। जब भुजा AC, AB को पूरी तरह ढक ले, तो कागज को दबाकर मोड़ का निशान प्राप्त कीजिए। अब कागज को खोलकर मोड़ के निशान के ऊपर एक रेखा AD खींचिए, जो BC को D पर मिलती है (आकृति 10.7)। अब कागज को पुनः AD के अनुदिश मोड़िए जिससे AB भुजा AC पर तथा CD, BD पर पड़े। हम देखते हैं कि $\angle C$ ने $\angle B$ को पूरी तरह ढक लिया है। अर्थात् $\angle ABD = \angle ACD$ है।

आकृति 10.7

क्रियाकलाप 2: एक ΔABC इस प्रकार खींचिए कि AB = 5 सेमी = AC तथा BC = 4 सेमी हो। $\angle B$ तथा $\angle C$ को मापिए तथा $\angle B - \angle C$ ज्ञात कीजिए। इस प्रक्रिया को भिन्न माप वाले दो अन्य समद्विबाहु त्रिभुजों ABC के लिए दोहराइए जिनमें AB = AC हो। इस प्रकार प्राप्त

प्रेक्षणों को निम्न प्रकार, एक सारणी के रूप में लिखिए:

क्र. सं.	ΔABC	$\angle B$	$\angle C$	$\angle B - \angle C$
1.	AB = AC = 5 सेमी, BC = 4 सेमी			
2.	AB = AC = ..., BC = ...			
3.	AB = AC = ..., BC = ...			

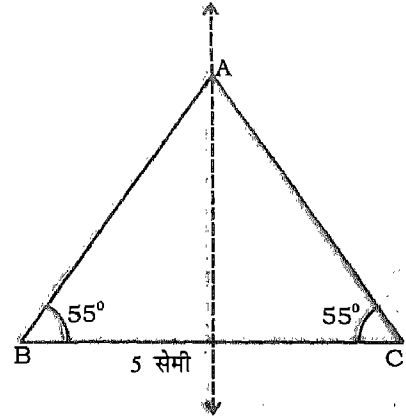
हम क्या देखते हैं? उपर्युक्त सारणी में, हम देखते हैं कि $\angle B - \angle C$ या तो शून्य है या इतना छोटा कि नगण्य माना जा सकता है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $\angle B = \angle C$ है।

इन क्रियाकलापों से प्राप्त होने वाला परिणाम है:

यदि किसी त्रिभुज में दो भुजाएँ बराबर हों, तो उनके सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

या

समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

क्रियाकलाप 3: एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $\angle B = 55° = \angle C$ तथा BC = 5 सेमी है (आकृति 10.8)। अक्स कागज पर ΔABC का एक अक्स बनाइए। इसे मोड़कर, C को B पर इस प्रकार रखिए कि BC के दोनों भाग एक दूसरे को ढक लें। दबाकर मोड़ का निशान बनाइए। इस स्थिति में, हम पाते हैं कि मोड़ का निशान शीर्ष A से होकर जाता है तथा भुजा AC ने भुजा AB को पूरी तरह ढक रखा है। इस प्रकार, हमें ज्ञात होता है कि AC = AB।

आकृति 10.8

क्रियाकलाप 4: एक ΔABC बनाइए, जिसमें $\angle B = \angle C = 50°$ तथा BC = 6 सेमी हों। AB एवं AC को मापिए तथा AB – AC प्राप्त कीजिए।

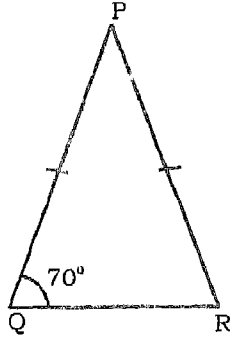
ABC नाम वाले अन्य त्रिभुज अलग माप लेकर बनाइए, जिनमें $\angle B = \angle C$ हो। इनमें भी AB एवं AC को मापकर AB – AC ज्ञात कीजिए। इन सभी प्रेक्षणों को निम्न सारणी में लिखिए:

क्र. सं.	ΔABC	AB	AC	AB – AC
1.	BC = 6 सेमी, $\angle B = 50° = \angle C$			
2.	BC = ... सेमी, $\angle B$ = ... = $\angle C$			
3.	BC = ... सेमी, $\angle B$ = ... = $\angle C$			

तीनों त्रिभुजों के लिए हम पाते हैं कि $AB - AC$ या तो शून्य है अथवा नगण्य। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि $AB = AC$ है।

उपर्युक्त क्रियाकलापों से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है:

यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हैं, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होती हैं।

उदाहरण 3: ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $PQ = PR$ है (आकृति 10.9)। यदि $\angle Q = 70°$ है, तो शेष दो कोण ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.9

हल: ΔPQR में,

$PQ = PR$

अतः, $\angle Q = \angle R$ (1)

(त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

परंतु $\angle Q = 70°$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle R = 70°$ [(1) से]

हम जानते हैं कि

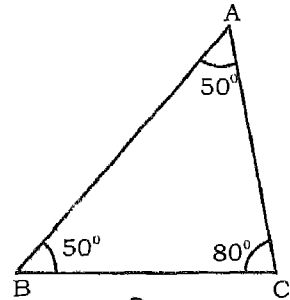
$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$$

अर्थात् $\angle P + 70° + 70° = 180°$

अतः, $\angle P = 180° - 140°$

$= 40°$

इस प्रकार, त्रिभुज PQR के वांछित कोण $\angle P = 40°$ और $\angle R = 70°$ हैं।

उदाहरण 4: ΔABC में, $\angle A = 50°, \angle B = 50°$ और $\angle C = 80°$ हैं (आकृति 10.10)। इस त्रिभुज की कौन-सी दो भुजाएँ बराबर हैं?

आकृति 10.10

हल: दिया है कि $\angle A = 50^\circ = \angle B$ है।

अत:, इन कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होनी चाहिए।

$\angle A$ की सम्मुख भुजा BC और $\angle B$ की सम्मुख भुजा AC है।

इसलिए, ΔABC में $AC = BC$ है।

उदाहरण 5: एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$ है (आकृति 10.11)। यदि $\angle A = 50^\circ$ है, तो शेष दो कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में दिया है कि

$$AB = AC$$

अत:, $\angle C = \angle B$ (1)

(त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

अब त्रिभुज के कोणों के योग के गुण के अनुसार,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

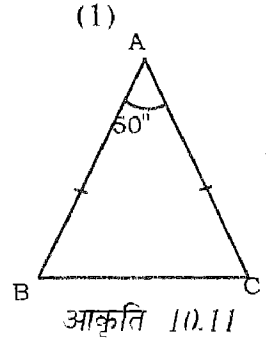
क्योंकि $\angle A = 50^\circ$ है,

अत: $\angle B + \angle C = 180^\circ - 50^\circ$

$= 130^\circ$

परंतु $\angle B = \angle C$ [(1) से]

इसलिए, $2\angle B = 130^\circ$

या $\angle B = 65^\circ = \angle C$

आकृति 10.11

उदाहरण 6: आकृति 10.12 में दिए गए समद्विबाहु ΔPQR में, x का मान ज्ञात कीजिए, जब $PQ = PR$ हो।

हल: आकृति 10.12 में, दिया है कि

$$PQ = PR$$

इसलिए $\angle R = \angle Q$

परंतु $\angle Q = 30^\circ$ (दिया है)

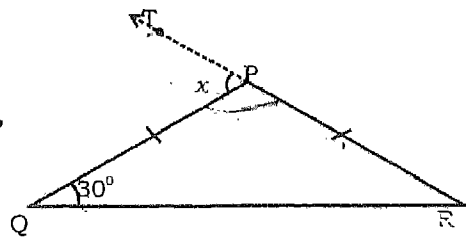
अत:, $\angle R = 30^\circ$

अब, त्रिभुज के कोणों के योग के गुण के अनुसार,

$$\angle QPR + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

इसलिए, $\angle QPR = 180^\circ - (\angle Q + \angle R)$

$= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

आकृति 10.12

अब $\angle TPQ + \angle QPR = 180°$ (क्योंकि यह एक रैखिक युग्म बनाते हैं)

अतः, $\angle TPQ = 180° - 120°$

$= 60°$

इसलिए, $x = 60°$

उदाहरण 7: आकृति 10.13 में, ΔPQR एवं ΔSQR समद्विबाहु त्रिभुज हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) $\angle PQR$ एवं $\angle PRQ$

(ii) $\angle SQR$ एवं $\angle SRQ$

(iii) x

आकृति 10.13

हल: (i) ΔPQR में, दिया है:

$PQ = PR$

अतः, $\angle PRQ = \angle PQR$ (1)

कोणों के योग के गुण के अनुसार,

$\angle P + \angle PQR + \angle PRQ = 180°$

या $30° + \angle PQR + \angle PRQ = 180°$

या $\angle PQR + \angle PRQ = 180° - 30° = 150°$

अतः, $\angle PQR = \angle PRQ = \frac{150°}{2} = 75°$ [(1) से] (2)

(ii) ΔSQR में, दिया है:

$SQ = SR$

अतः, $\angle SRQ = \angle SQR$ (3)

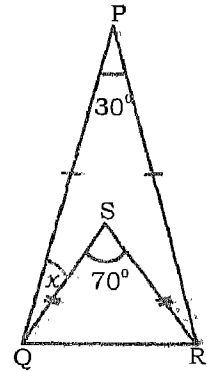
पुनः, कोणों के योग के गुण के अनुसार,

$\angle S + \angle SQR + \angle SRQ = 180°$

या $\angle SQR + \angle SRQ = 180° - \angle S$

$= 180° - 70°$

$= 110°$

अतः, $\angle SQR = \angle SRQ = \frac{110°}{2} = 55°$ [(3) से] (4)

(iii) आकृति द्वारा,

$$x = \angle PQR - \angle SQR$$

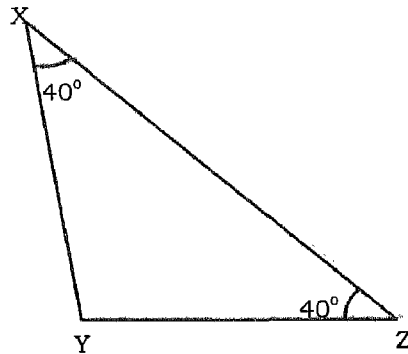
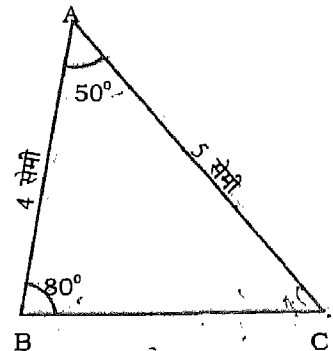
(2) एवं (4) से मान रखने पर,

$$x = 75° - 55°$$
$$= 20°$$

अतः, $x = 20°$

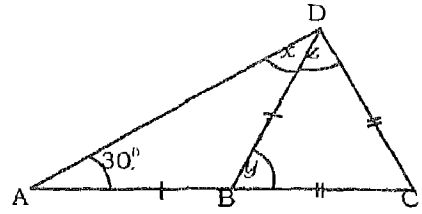
टिप्पणी: हमने आकृतियों 10.9, 10.11, 10.12 एवं 10.13 में, त्रिभुज की बराबर भुजाओं को एक ही प्रकार के चिह्नों से चिह्नित किया है। इसी प्रकार, हम बराबर कोण दर्शाने के लिए भी एक जैसे ही चिह्नों का प्रयोग कर सकते हैं।

प्रश्नावली 10.2

1. यदि ΔABC में, $BC = CA$ हो, तो कौन-से दो कोण बराबर होंगे?
2. यदि ΔDEF में, $\angle D = \angle F$ हो, तो कौन-सी दो भुजाएँ बराबर होंगी?
3. ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $PQ = PR$ है। यदि $\angle R = 45°$ हो, तो शेष दो कोणों के मापों को ज्ञात कीजिए।
4. यदि समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, $AB = AC$ तथा $\angle A = 80°$ हो, तो $\angle C$ का माप क्या होगा?
5. यदि ΔPQR में, $QP = QR$ तथा $\angle P = 36°$ हो, तो $\angle Q$ का माप क्या होगा?
6. ΔXYZ में, $\angle X = \angle Z = 40°$ है (आकृति 10.14)। इस त्रिभुज की कौन-सी दो भुजाएँ बराबर हैं?

आकृति 10.14 *आकृति 10.15*

7. आकृति 10.15 में, भुजा BC, की लंबाई ज्ञात कीजिए।

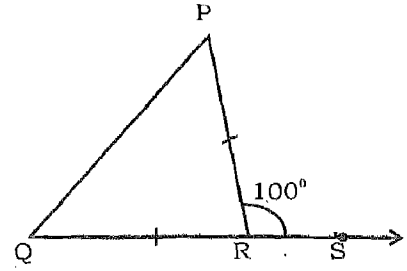
8. आकृति 10.16 में, बराबर भुजाओं को समान चिह्नों से दर्शाया गया है।

(i) x (ii) y (iii) z

के मान ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर के कारणों को स्पष्ट कीजिए।

आकृति 10.16

9. आकृति 10.17 में, बराबर भुजाएँ एक जैसे चिह्नों से प्रदर्शित की गई हैं। ज्ञात कीजिए:

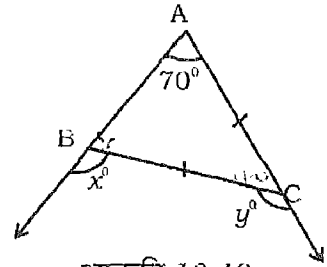
(i) $\angle PRQ$ (ii) $\angle PQR$

अपने उत्तर के कारणों को स्पष्ट कीजिए।

आकृति 10.17

10. आकृति 10.18 में, ΔABC समद्विबाहु है तथा $BC = AC$ है। यदि $\angle A = 70°$ है, तो ज्ञात कीजिए:

(i) $\angle ABC$ और $\angle ACB$

(ii) x एवं y के मान

अपने उत्तर के कारणों को स्पष्ट कीजिए।

आकृति 10.18

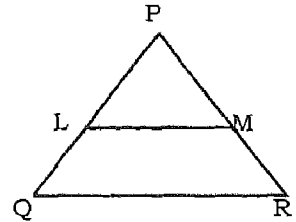
11. आकृति 10.19 के ΔPQR में $PQ = PR$ है। L रेखा PQ पर एवं M रेखा PR पर स्थित है तथा LM रेखा QR के समांतर है। निम्न कथनों के कारण लिखिए:

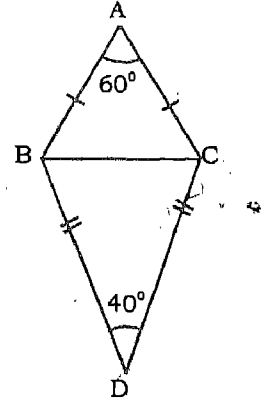
(i) $\angle Q = \angle R$ ।

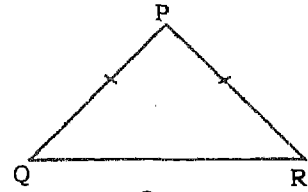
(ii) $\angle PLM = \angle Q$ ।

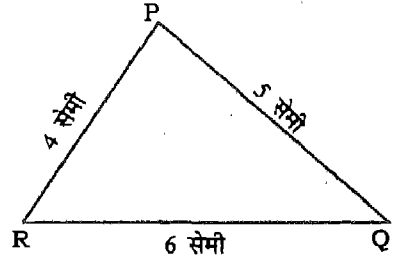
(iii) $\angle PML = \angle R$ ।

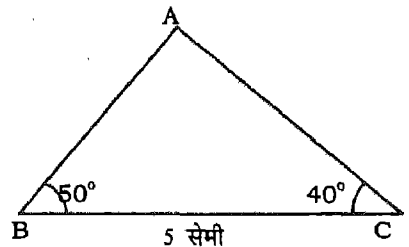
(iv) $\angle PLM = \angle PML$ ।

(v) ΔPLM एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

आकृति 10.19

12. आकृति 10.20 में, एक ही आधार BC पर दो समद्विबाहु त्रिभुज ABC एवं DBC बने हैं तथा बराबर भुजाएँ समान चिह्नों से चिह्नित हैं। यदि $\angle A = 60°$ तथा $\angle D = 40°$ हो, तो ज्ञात कीजिए:
    (i) $\angle ABC$ एवं $\angle ACB$।
    (ii) $\angle DBC$ एवं $\angle DCB$।
    (iii) $\angle ABD$ एवं $\angle ACD$। क्या ये कोण बराबर हैं?

आकृति 10.20

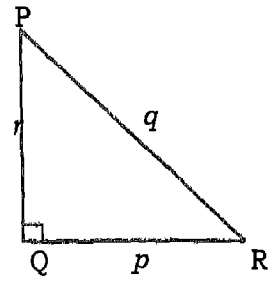
13. आकृति 10.21 में दर्शाए समद्विबाहु त्रिभुज ΔPQR में, $PQ = PR$ है तथा $\angle P$, $\angle Q$ का दुगुना है। सभी कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.21

14. आकृति 10.22 द्वारा प्रदर्शित ΔPRQ में, $PQ = 5$ सेमी, $QR = 6$ सेमी तथा $PR = 4$ सेमी है।
    (i) क्या $\angle Q = \angle R$ है?
    (ii) यदि नहीं, तो कौन-सा कोण बड़ा है?
    (iii) बड़ा कोण बड़ी भुजा के सम्मुख है या छोटी भुजा के?

आकृति 10.22

15. ΔABC में, $BC = 5$ सेमी, $\angle C = 40°$ एवं $\angle B = 50°$ है (आकृति 10.23)।
    (i) क्या $AB = AC$ है? यदि नहीं, तो क्यों?
    (ii) AB और AC में से कौन-सी भुजा बड़ी है?
    (iii) बड़ी भुजा छोटे कोण के सम्मुख है या बड़े कोण के?

आकृति 10.23

10.4 पाइथागोरस प्रमेय

आकृति 10.24

क्रियाकलाप 5: तीन समकोण त्रिभुज खींचिए तथा प्रत्येक को ΔPQR से इस प्रकार नामांकित कीजिए कि $\angle Q$ समकोण रहे (आकृति 10.24)। भुजाओं p, r एवं कर्ण q को मापिए। p^2, q^2, r^2 को परिकलित कीजिए तथा निम्न प्रकार सारणी में लिखिए:

समकोण त्रिभुज	माप			वर्ग				अंतर
	p	r	q	p^2	r^2	p^2+r^2	q^2	$q^2-(p^2+r^2)$
1.								
2.								
3.								

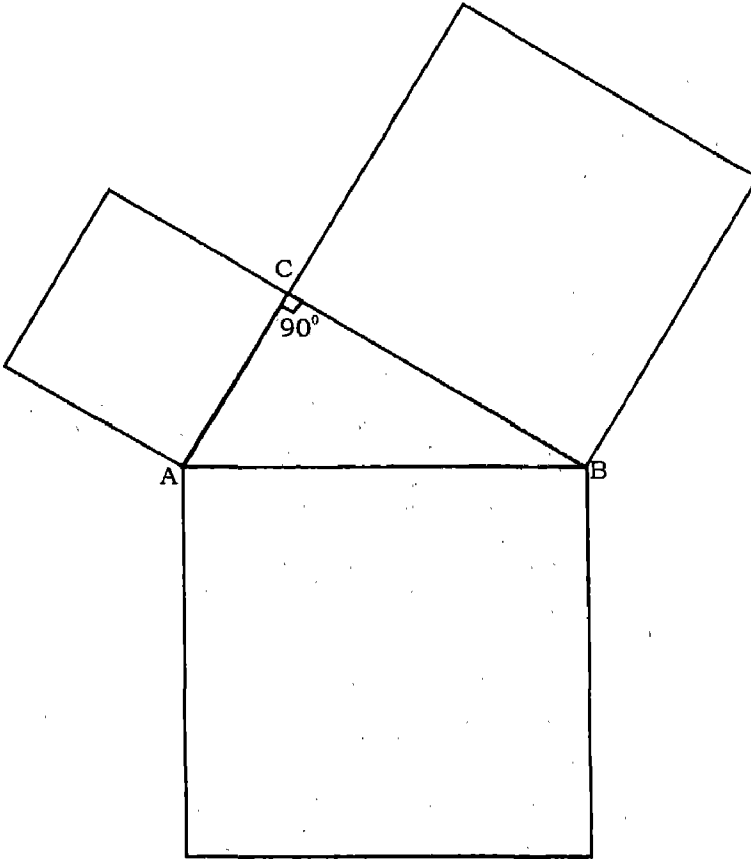
हम क्या देखते हैं? सारणी से हम देखते हैं कि अंतर $q^2-(p^2+r^2)$ या तो शून्य है या नगण्य।

अर्थात् $\qquad q^2 = p^2 + r^2$

इस क्रियाकलाप से हम निम्नलिखित परिणाम निकालते हैं:

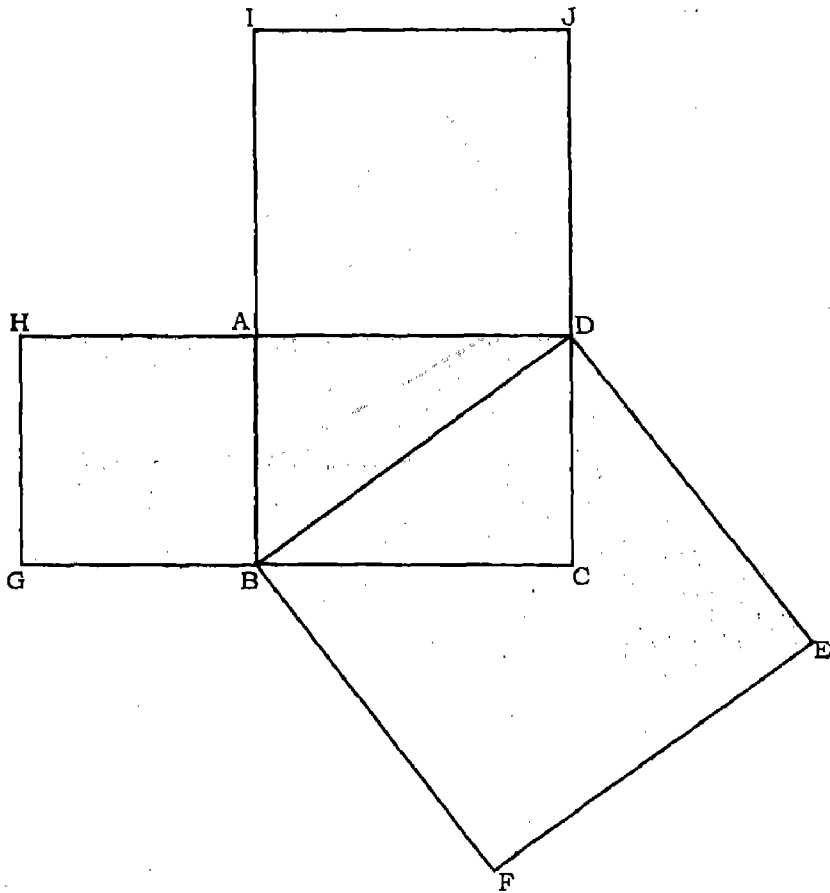
समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

दूसरे शब्दों में, यदि समकोण C वाला ΔABC एक समकोण त्रिभुज है (आकृति 10.25), जिससे AB कर्ण तथा AC एवं BC शेष दो भुजाएँ हैं, तो

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

आकृति 10.25

समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच यह संबंध *पाइथागोरस प्रमेय* (*Pythagoras Theorem*) के नाम से जाना जाता है। ईसा से लगभग 800 वर्ष पूर्व एक भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने इस प्रमेय को इसके सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया था और उसे संख्यात्मक उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया था। *बौधायन प्रमेय* को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

'एक आयत के विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल आयत की दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।'

इस प्रकार, आयत ABCD (आकृति 10.26) के विकर्ण BD पर बने वर्ग का क्षेत्रफल भुजाओं AB एवं AD पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा।

आकृति 10.26

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, समकोण त्रिभुज ABC में यदि $\angle C$ समकोण है, तो

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2,$$

जहाँ AB कर्ण तथा AC एवं BC अन्य दो भुजाएँ हैं। यहाँ से हम देखते हैं कि

$$(AB)^2 > (AC)^2 \text{ एवं } (AB)^2 > (BC)^2$$

अर्थात् $\quad AB > AC$ एवं $AB > BC$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *कर्ण समकोण त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा होती है।*

10.5 पाइथागोरस प्रमेय का विलोम

आकृति 10.27

क्रियाकलाप 6: एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें AB = 3 सेमी, AC = 4 सेमी तथा BC = 5 सेमी हो (आकृति 10.27)। इस त्रिभुज में, संबंध

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

सत्य है, क्योंकि $5^2 = 3^2 + 4^2$ होता है।

इस त्रिभुज में, $\angle BAC$ क्या है?

मापने पर ज्ञात होता है कि यह कोण 90° है।

अर्थात् ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

आकृति 10.28

इसी प्रकार, एक त्रिभुज DEF बनाइए जिसमें DE = 13 सेमी, EF = 5 सेमी एवं DF = 12 सेमी हो (आकृति 10.28)।

यहाँ भी संबंध

$$DE^2 = EF^2 + DF^2$$

सत्य है, क्योंकि $13^2 = 5^2 + 12^2$ होता है।

मापने पर ज्ञात होता है कि यह त्रिभुज भी समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle DFE = 90°$ है।

आकृति 10.29

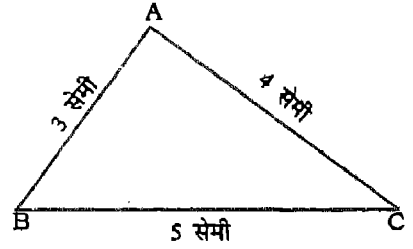
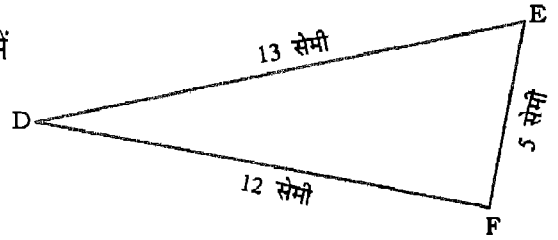
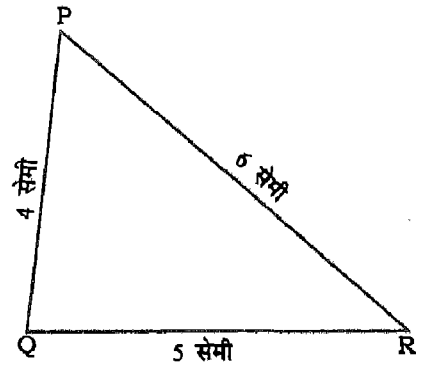
अब एक त्रिभुज PQR बनाइए जिसमें PQ = 4 सेमी, QR = 5 सेमी तथा PR = 6 सेमी हो (आकृति 10.29)।

यहाँ संबंध

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

सत्य नहीं है, क्योंकि $6^2 \neq 4^2 + 5^2$ है।

मापने पर ज्ञात होता है कि सबसे लंबी भुजा PR का सम्मुख कोण $\angle PQR$ भी समकोण नहीं है।

अर्थात् ΔPQR समकोण त्रिभुज नहीं है।

इन क्रियाकलापों द्वारा जो परिणाम प्राप्त होता है, उसके अनुसार

'यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर है, तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।'

अर्थात्

पाइथागोरस प्रमेय का विलोम सत्य है।

तीन धनात्मक पूर्णांक a, b, c इसी क्रम में *पाइथागोरीय त्रिक* (*Pythagorian triplets*) कहलाते हैं, यदि $a^2 + b^2 = c^2$ हो।

(3, 4, 5) एक पाइथागोरीय त्रिक है। इसी प्रकार, (6, 8, 10) एवं (9, 12, 15) भी पाइथागोरीय त्रिक हैं। वस्तुतः, यदि (a, b, c) एक पाइथागोरीय त्रिक है और k एक अचर है, तो (a', b', c') भी एक पाइथागोरीय त्रिक होगी, जहाँ $a' = ka$, $b' = kb$ तथा $c' = kc$ है। यदि m एवं n दो धनात्मक पूर्णांक हैं एवं $n > m$ है, तो $a = (n^2 - m^2)$, $b = (2mn)$, $c = (n^2 + m^2)$ लेने पर भी हमें एक पाइथागोरीय त्रिक प्राप्त हो जाएगी। यदि $m = 1, n = 2$ लें, तो प्राप्त पाइथागोरीय त्रिक (3, 4, 5) होगी। इसी प्रकार, $m = 2, n = 3$ लेने पर (5, 12, 13) तथा $m = 3, n = 4$ लेने पर (7, 24, 25) पाइथागोरीय त्रिक प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 8: एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी एवं 8 सेमी हैं। इसका कर्ण क्या होगा?

हल: मान लें कि त्रिभुज ABC का $\angle C$ समकोण है तथा भुजाएँ BC = 6 सेमी एवं AC = 8 सेमी हैं (आकृति 10.30)।

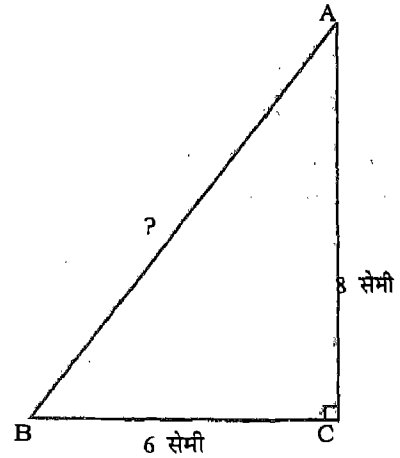
पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार,

$$
\begin{aligned}
(AB)^2 &= (AC)^2 + (BC)^2 \\
&= (8)^2 + (6)^2 \\
&= 64 + 36 \\
&= 100 = (10)^2
\end{aligned}
$$

अतः, AB = 10 सेमी

अर्थात्, त्रिभुज का कर्ण 10 सेमी है।

आकृति 10.30

उदाहरण 9: एक पेड़ का तना भूमि से 12 मी की ऊँचाई से टूटा, परंतु पेड़ से अलग नहीं हुआ। जिस स्थान पर पेड़ की चोटी ने भूमि को छुआ, वह पेड़ के तने के आधार से 5 मी दूर था। टूटने से पूर्व पेड़ की ऊँचाई क्या थी?

हल: मान लीजिए कि पेड़ ABC, B पर से टूटा है तथा इसका शीर्ष A गिरने के बाद भूमि को D पर स्पर्श करता है (आकृति 10.31)।

इस प्रकार, AB = DB है।

समकोण त्रिभुज BCD में, BC = 12 मी

तथा CD = 5 मी है।

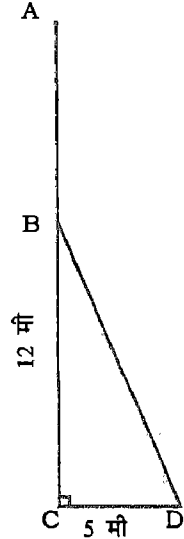
अतः, पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार,

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$$
$$= (12)^2 + (5)^2$$
$$= 144 + 25$$
$$= 169$$
$$= (13)^2$$

या BD = 13

इस प्रकार, AB = BD = 13 मी [(1) से]

तथा पेड़ की टूटने से पहले ऊँचाई AC = AB + BC = (13 + 12) = 25 मी

A
B
12 मी
C 5 मी D

आकृति 10.31

उदाहरण 10: एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी, 4.5 सेमी एवं 7.5 सेमी हैं। क्या यह त्रिभुज समकोण त्रिभुज है? यदि हाँ, तो इसका कर्ण क्या है?

हल: यहाँ त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी, 4.5 सेमी एवं 7.5 सेमी हैं। साथ ही,

$6^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25 = 56.25$, तथा $(7.5)^2 = 56.25$

इस प्रकार, $(7.5)^2 = 6^2 + (4.5)^2$

अतः, पाइथागोरस प्रमेय के विलोम के अनुसार, इन भुजाओं वाला त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है। साथ ही, 7.5 सेमी लंबी सबसे बड़ी भुजा इसका कर्ण है।

प्रश्नावली 10.3

1. त्रिभुज ABC, C पर समकोण है। यदि AC = 9 सेमी एवं BC = 12 सेमी हो, तो पाइथागोरस प्रमेय द्वारा AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।
2. निम्न में से प्रत्येक में समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं के माप दिए हैं। प्रत्येक में कर्ण का वर्ग ज्ञात कीजिए।

   (i) a = 1.5 सेमी, b = 2 सेमी (ii) a = 2.5 सेमी, b = 6 सेमी

   (iii) a = 7.5 सेमी, b = 18 सेमी (iv) a = 14 सेमी, b = 48 सेमी

   (v) a = 10 सेमी, b = 24 सेमी

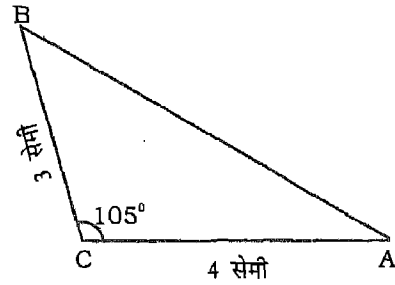
3. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण 25 सेमी है। यदि एक भुजा 24 सेमी हो, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।
4. जब 17 मी लंबी एक सीढ़ी को किसी घर की दीवार के पास खड़ा किया जाता है, तो वह केवल खिड़की तक ही पहुँच पाती है। यदि खिड़की भूमि से 15 मी ऊँची है, तो बताइए कि सीढ़ी का निचला सिरा दीवार के आधार से कितनी दूरी पर है।
5. यदि एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के कर्ण का वर्ग 200 सेमी^{2} है, तो प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. ज्ञात कीजिए कि निम्न में कौन-सी भुजाएँ समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हो सकती हैं?

   (i) 1,1,2 (ii) 27,36,45 (iii) 14,48,50

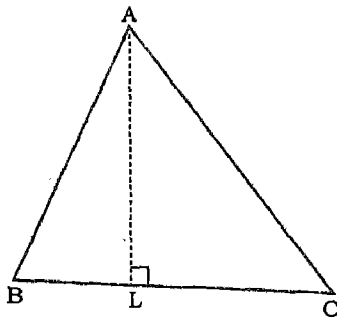
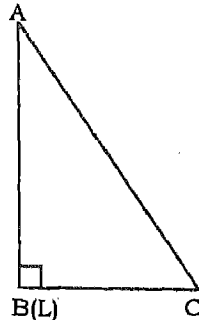
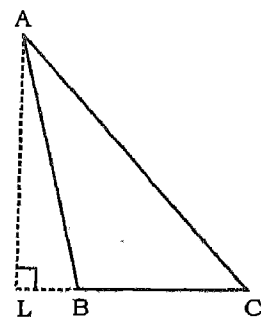
   (iv) 15,36,39 (v) 15,10,25 (vi) 12,35,37
7. एक त्रिभुज ABC में, AB = 11 सेमी, BC = 60 सेमी एवं AC = 61 सेमी है। क्या ΔABC एक समकोण त्रिभुज है? यदि हाँ, तो कौन-सा कोण समकोण है?
8. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें AC = 4 सेमी, BC = 3 सेमी और $\angle C = 105°$ हो (आकृति 10.32)। AB को मापिए। क्या $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ है? यदि नहीं, तो निम्न में से क्या सत्य है?

$$(AB)^2 > (AC)^2 + (BC)^2$$

या

$$(AB)^2 < (AC)^2 + (BC)^2$$

आकृति 10.32

10.6 त्रिभुज के शीर्षलंब

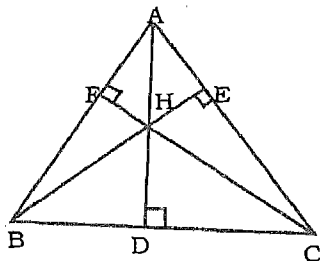
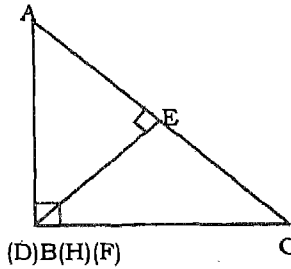
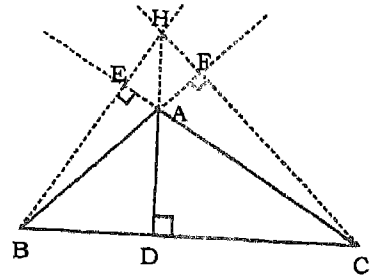
आकृति 10.33 (i), (ii), (iii) में दर्शाए गए तीन त्रिभुजों ABC पर विचार करें। आकृति 10.33 (i) में, ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, आकृति 10.33 (ii) में, ABC एक समकोण

(*i*)

(*ii*)

(*iii*)

आकृति 10.33

त्रिभुज है तथा आकृति 10.33 (iii) में, ABC एक अधिक कोण त्रिभुज है। तीनों त्रिभुजों में रेखाखंड AL शीर्ष A से रेखा BC पर लंब है। तीनों त्रिभुजों में L की स्थितियाँ भिन्न हैं। न्यून कोण त्रिभुज (i) में, बिंदु L त्रिभुज की भुजा BC पर स्थित है; समकोण त्रिभुज (ii) में, बिंदु L शीर्ष B के संपाती है तथा $\angle B$ के अधिक कोण होने की स्थिति (iii) में, L भुजा BC के बाहर, परंतु रेखा BC पर स्थित है।

रेखाखंड AL शीर्ष A से BC पर शीर्षलंब (altitude) कहलाता है। इस प्रकार, *किसी त्रिभुज के शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा वाली रेखा पर डाले गए लंब रेखाखंड को त्रिभुज का शीर्षलंब (altitude) कहते हैं।*

प्रत्येक त्रिभुज में तीन शीर्षलंब होते हैं। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलंब प्राप्त होता है।

क्रियाकलाप 7: एक त्रिभुज ABC बनाइए। शीर्षों A एवं B से सम्मुख भुजाओं पर लंब AD एवं BE खींचिए [आकृति 10.34 (i), (ii), (iii)]। इन शीर्षलंबों को [आवश्यकता पड़ने पर

(*i*) (*ii*) (*iii*)

आकृति 10.34

बढ़ाकर जैसा कि आकृति (iii) में है] बिंदु H पर मिलने दीजिए। अब CH को जोड़िए और बढ़ा कर AB के साथ F पर मिला दीजिए। $\angle CFA$ को मापिए।

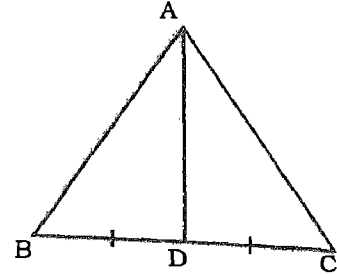
हम देखते हैं कि $\angle CFA = 90°$ है, अर्थात् $CF \perp AB$ है। इस प्रकार, CF तीसरा शीर्षलंब है तथा यह पहले दो शीर्षलंबों के प्रतिच्छेद बिंदु H से होकर जाता है। इसी क्रिया को और अधिक त्रिभुजों पर दोहराने पर भी हमें यही तथ्य प्राप्त होता है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *त्रिभुज के शीर्षलंब संगामी (concurrent) होते हैं।*

त्रिभुज के शीर्षलंबों के संगमन बिंदु को त्रिभुज का लंबकेंद्र (orthocentre) कहते हैं।

टिप्पणियाँ: 1. यों तो त्रिभुज के शीर्षलंब रेखाखंड होते हैं, परंतु इनके संगमन गुण में शीर्षलंबों से हमारा तात्पर्य उन रेखाओं से होता है जिनके ये रेखाखंड (शीर्षलंब) भाग होते हैं।

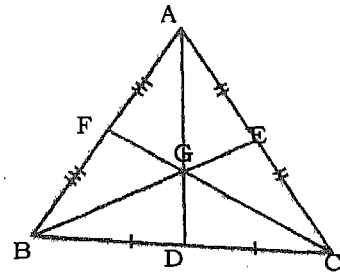
2. किसी त्रिभुज का लंबकेंद्र ज्ञात करने के लिए, केवल दो शीर्षलंब ही खींचना पर्याप्त है। यह लंबकेंद्र त्रिभुज के अभ्यंतर में, त्रिभुज पर अथवा त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित हो सकता है [आकृति 10.34 (i), (ii), (iii)]।

10.7 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

एक त्रिभुज ABC लीजिए (आकृति 10.35)। शीर्ष A को सम्मुख भुजा BC के मध्य-बिंदु D से मिलाएँ। इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड AD त्रिभुज ABC की एक *माध्यिका* (*median*) कहलाता है। इस प्रकार,

आकृति 10.35

त्रिभुज के किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य-बिंदु से जोड़ने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं।

त्रिभुज के तीन शीर्ष होते हैं और प्रत्येक शीर्ष से एक माध्यिका प्राप्त होती है। अतः, एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती हैं।

क्रियाकलाप 8: एक त्रिभुज ABC खींचिए। BC का D पर तथा AC का E पर समद्विभाजन कीजिए। माध्यिकाएँ AD एवं BE खींचिए तथा इनके प्रतिच्छेद बिंदु को G से अंकित कीजिए (आकृति 10.36)। CG को मिलाइए तथा बढ़ाकर AB के बिंदु F तक ले जाइए। अब AF तथा BF को मापिए। क्या AF = BF है? हम देखते हैं कि F, AB का मध्य-बिंदु है, अर्थात् CF त्रिभुज ABC की तीसरी माध्यिका है।

आकृति 10.36

यदि हम यही क्रिया कुछ अन्य त्रिभुजों के लिए भी दोहराएँ, तो हमें यही तथ्य प्राप्त होता है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती हैं। माध्यिकाओं के संगमन बिंदु को त्रिभुज का केंद्रक (centroid) कहते हैं।*

टिप्पणी: त्रिभुज का केंद्रक प्राप्त करने के लिए इसकी दो माध्यिकाएँ खींचना ही पर्याप्त होता है। केंद्रक सदैव त्रिभुज के अभ्यंतर में ही स्थित होता है।

प्रश्नावली 10.4

1. रिक्त स्थान भरिए:

   (i) त्रिभुज का शीर्षलंब वह .... है, जो इसके किसी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर .... है।

   (ii) जहाँ त्रिभुज के शीर्षलंब आपस में मिलते हैं, यदि आवश्यक हो तो बढ़ा कर, वह बिंदु त्रिभुज का .... कहलाता है।

   (iii) यदि त्रिभुज ABC अधिक कोण त्रिभुज है, तो इसका लंबकेंद्र त्रिभुज के .... स्थित होगा।

   (iv) यदि ΔABC में $\angle C$ समकोण है, तो इसके दो शीर्षलंब .... एवं .... होंगे।

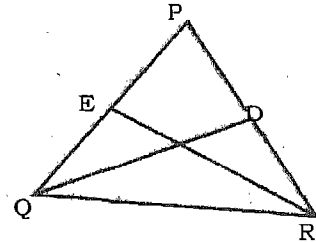
   (v) यदि H, ΔABC का लंबकेंद्र है, तो BH .... पर लंब होगा।

   (vi) त्रिभुज की माध्यिकाएँ .... होती हैं।

   (vii) त्रिभुज की माध्यिकाओं के संगमन बिंदु को त्रिभुज का .... कहते हैं।

   (viii) यदि G, ΔABC का केंद्रक है, तो CG भुजा .... को समद्विभाजित करता है।

   (ix) त्रिभुज का केंद्रक उसके .... में स्थित होता है।

2. आकृति 10.37 में, ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $PQ = PR$ है। बराबर भुजाओं पर दो माध्यिकाएँ QD एवं RE खींचिए।

   (i) माप कर सत्यापित कीजिए कि $QD = RE$ है।

   (ii) क्या $QE = RD$ है? कारण बताइए।

आकृति 10.37

3. ΔABC का $\angle C$ समकोण है। क्या आप बिना शीर्षलंब खींचे, इसका लंबकेंद्र ज्ञात कर सकते हैं? यदि हाँ, तो इसे नामांकित कीजिए।

4. एक त्रिभुज PQR इस प्रकार खींचिए कि $\angle Q = 110°$ हो। इसके शीर्षलंब PL एवं QM खींचिए। मान लें कि ये H पर मिलते हैं। RH को जोड़िए जो PQ (बढ़ाने पर) के साथ N पर मिलती है।

(i) क्या $\angle RNQ = 90°$ है?

(ii) क्या H त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है या बहिर्भाग में?

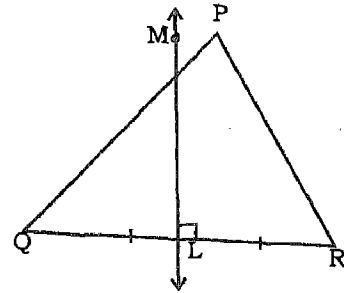
5. एक त्रिभुज DEF खींचिए जिसमें $\angle E = 90°$ हो। D एवं E से सम्मुख भुजाओं पर माध्यिकाएँ DP एवं EQ खींचिए। मान लीजिए कि DP एवं EQ बिंदु G पर काटती हैं। FG को जोड़िए और बढ़ाकर DE के बिंदु R तक ले जाइए। क्या DR = RE है? क्या FR, ΔDEF की माध्यिका है?

6. कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा दर्शाइए कि त्रिभुज के शीर्षलंब संगामी होते हैं।

7. कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा किसी समबाहु त्रिभुज का लंबकेंद्र ज्ञात कीजिए।

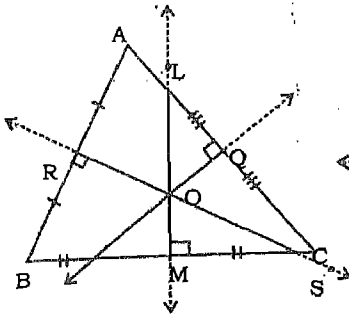
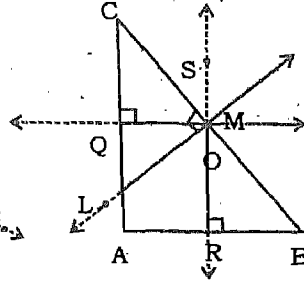
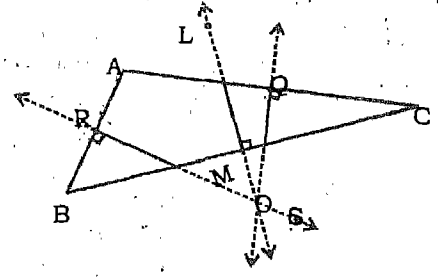
8. इसी प्रकार प्रश्न 7 के त्रिभुज का केंद्रक ज्ञात कीजिए।

10.8 त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक

आइए, एक त्रिभुज PQR पर विचार करें। भुजा QR के मध्य-बिंदु L से QR पर एक लंब ML खींचिए (आकृति 10.38)। LM भुजा QR का *लंब समद्विभाजक* (*perpendicular bisector*) कहलाता है।

आकृति 10.38

इस प्रकार, त्रिभुज की किसी भुजा का लंब समद्विभाजक उस रेखा को कहते हैं जो भुजा पर लंब हो तथा उसका समद्विभाजन भी करे।

एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ होती हैं। अतः, *इसमें तीन लंब समद्विभाजक होते हैं।*

क्रियाकलाप 9: तीन त्रिभुज खींचिए तथा प्रत्येक को ABC से नामित कीजिए। आकृति 10.39 (i) में त्रिभुज न्यून कोण त्रिभुज है, आकृति 10.39 (ii) का त्रिभुज समकोण त्रिभुज है, जबकि आकृति 10.39 (iii) में त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज है।

आकृति 10.39

तीनों में भुजाओं AB एवं BC के लंब समद्विभाजक क्रमशः RS तथा ML खींचिए। RS एवं ML के प्रतिच्छेद बिंदु O से $OQ \perp AC$ खींचिए जो AC के साथ Q पर मिले। AQ एवं QC को मापिए। हम देखते हैं कि $AQ = QC$ है और इस प्रकार PQ भुजा AC का लंब समद्विभाजक है। इस प्रकार, O त्रिभुज ABC की तीनों भुजाओं के लंब समद्विभाजकों का सार्व बिंदु हुआ।

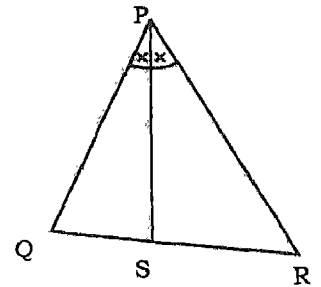
यही क्रिया कुछ अन्य त्रिभुजों में भी दोहराइए। प्रत्येक स्थिति में, हम यही पाते हैं कि त्रिभुज की भुजाओं के तीनों लंब समद्विभाजक एक ही बिंदु से होकर जाते हैं। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक, जिस एक बिंदु पर मिलते हैं, उसे त्रिभुज का परिकेंद्र (circumcentre) कहते हैं।

टिप्पणी: 1. त्रिभुज का परिकेंद्र ज्ञात करने के लिए किन्हीं दो भुजाओं के लंब समद्विभाजक खींचना पर्याप्त है।

2. समकोण त्रिभुज में परिकेंद्र कर्ण का मध्य-बिंदु होता है।

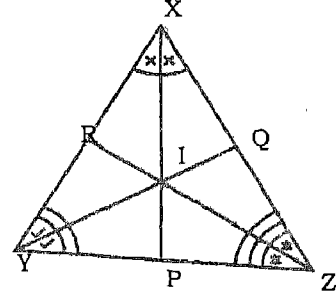
10.9 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक

आइए, एक त्रिभुज PQR पर विचार करें। $\angle QPR$ का समद्विभाजक खींचिए जो QR के साथ S पर मिलता है (आकृति 10.40)। PS, ΔPQR का एक *कोण समद्विभाजक*

आकृति 10.40

(या *अर्धक*) कहलाता है। इस प्रकार,

त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक (angle bisector) वह रेखाखंड होता है जो इस कोण का समद्विभाजन करे और जिसका दूसरा सिरा कोण की सम्मुख भुजा पर स्थित हो।

त्रिभुज में तीन कोण होते हैं और तीनों कोणों का एक समद्विभाजक होता है। अतः, *किसी त्रिभुज के तीन कोण समद्विभाजक होते हैं।*

क्रियाकलाप 10: एक त्रिभुज XYZ खींचिए। $\angle X$ एवं $\angle Y$ के समद्विभाजक XP एवं YQ खींचिए। शीर्ष Z को XP एवं YQ के प्रतिच्छेद बिंदु I से जोड़कर आगे बढ़ाएँ और XY के R बिंदु तक मिलाएँ (आकृति 10.41)। $\angle RZX$ एवं $\angle RZY$ को मापिए।

आकृति 10.41

हम क्या पाते हैं? हम पाते हैं कि $\angle RZX = \angle RZY$ है और इस प्रकार रेखाखंड ZR, $\angle Z$ का समद्विभाजक हुआ। इस प्रकार, तीसरे कोण का समद्विभाजक भी I से होकर जाता है।

कुछ अन्य त्रिभुजों पर भी यही क्रिया दोहराने पर, हमें ज्ञात होता है कि, प्रत्येक स्थिति में, त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक एक ही बिंदु से होकर जाते हैं।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *किसी त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं।*

किसी त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक, जिस बिंदु पर मिलते हैं, उसे त्रिभुज का अंतःकेंद्र (incentre) कहते हैं।

टिप्पणी: त्रिभुज का अंतः केंद्र ज्ञात करने के लिए उसके दो कोणों के समद्विभाजक खींचना ही पर्याप्त है।

प्रश्नावली 10.5

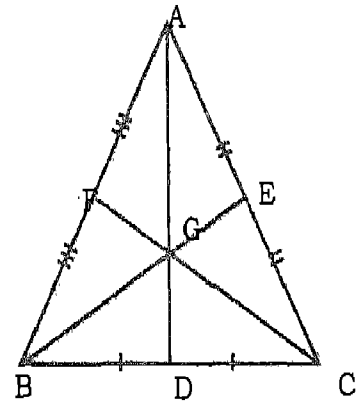
1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कर निम्न कथनों को सत्य बनाइए:
   (i) त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक .... होते हैं।
   (ii) त्रिभुज का परिकेंद्र उसकी भुजाओं के .... का संगमन बिंदु है।
   (iii) त्रिभुज के कोणों के अर्धक .... होते हैं।
   (iv) त्रिभुज का अंतःकेंद्र उसके .... का संगमन बिंदु है।
   (v) यदि I त्रिभुज ABC का अंतःकेंद्र है, तो AI .... का समद्विभाजक है।

2. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें AB = 5 सेमी, $\angle B = 70°$ तथा BC = 6 सेमी हो। इस त्रिभुज का अंतःकेंद्र ज्ञात कीजिए।

3. एक त्रिभुज PQR खींचिए जिसमें QR = 4.5 सेमी, $\angle R = 110°$ एवं PR = 7 सेमी हो। इसका परिकेंद्र ज्ञात कीजिए। क्या यह त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है?

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज PQR खींचिए जिसमें PQ = PR हो। मान लीजिए कि PS, $\angle P$ का समद्विभाजक है। ΔPQR के परिकेंद्र, लंबकेंद्र एवं केंद्रक ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी PS पर स्थित हैं?

5. एक समबाहु त्रिभुज DEF खींचिए। इसका अंतःकेंद्र, परिकेंद्र, लंबकेंद्र एवं केंद्रक ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी संपाती हैं?

6. ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। AD, BE एवं CF इसकी माध्यिकाएँ हैं (आकृति 10.42) तथा G इसका केंद्रक है। इस त्रिभुज का कागज पर अक्स उतारिए। कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा दिखाइए कि G त्रिभुज का परिकेंद्र भी है।

आकृति 10.42

7. एक कागज पर ΔABC खींचिए। कागज मोड़ने की उपयुक्त प्रक्रिया द्वारा इसके अंतःकेंद्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. समद्विबाहु त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
2. यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होती हैं।
3. यदि किसी समकोण त्रिभुज में a एवं b भुजाओं की लंबाइयाँ हों और c कर्ण की, तो $c^2 = a^2 + b^2$ होता है।
4. यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ a, b एवं c हों तथा $c^2 = a^2 + b^2$ भी हो, तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है तथा c लंबाई वाली भुजा उसका कर्ण होती है।
5. त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं।
6. त्रिभुज के शीर्षलंब संगामी होते हैं।
7. त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक संगामी होते हैं।
8. त्रिभुज के कोण-समद्विभाजक संगामी होते हैं।
9. जिस बिंदु पर त्रिभुज की माध्यिकाएँ मिलती हैं उसे त्रिभुज का केंद्रक कहते हैं।
10. जिस बिंदु पर त्रिभुज के शीर्षलंब मिलते हैं उसे त्रिभुज का लंबकेंद्र कहते हैं।
11. जिस बिंदु पर त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेंद्र कहते हैं।
12. जिस बिंदु पर त्रिभुज के कोण-समद्विभाजक मिलते हैं उसे त्रिभुज का अंतःकेंद्र कहते हैं।

सर्वांगसम त्रिभुज

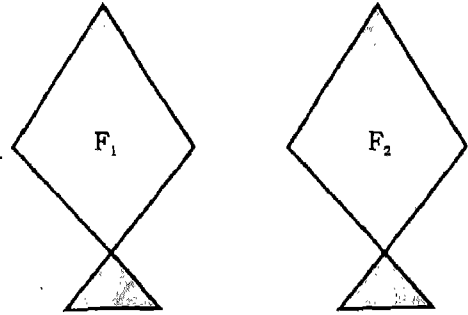
अध्याय 11

11.1 भूमिका

दैनिक जीवन में, हम अनेक ऐसी वस्तुओं को देखते हैं, जिनका आकार, माप आदि एक जैसा होता है। उदाहरणार्थ, एक ही ताले की दो चाबियाँ, पचास पैसे के सिक्के, एक ही उत्तर पुस्तिका के पृष्ठ, एक ही तरह के शेविंग ब्लेड या एक ही साँचे में ढले खिलौने आदि। जिन वस्तुओं / आकृतियों का आकार, माप आदि एक जैसा होता है, वे वस्तुएँ / आकृतियाँ *सर्वांगसम* (*congruent*) कहलाती हैं। वस्तुओं के बीच इस संबंध को *सर्वांगसमता* (*congruence relation*) कहते हैं।

इस अध्याय में, हम तल में बनी कुछ आकृतियों की सर्वांगसमता पर चर्चा करेंगे। दूसरे शब्दों में, हम उन आकृतियों का अध्ययन करेंगे, जिनका आकार एवं माप एक जैसा है और जो एक तल में स्थित हैं।

11.2 आकृतियों की सर्वांगसमता

आइए, मान लें कि हमें तल में बनी दो आकृतियाँ F_1 एवं F_2 दी हुई हैं (आकृति 11.1)। हम किस प्रकार यह ज्ञात करेंगे कि ये आकृतियाँ सर्वांगसम हैं अथवा नहीं? एक आकृति, मान लें F_1 को *अक्स* कागज पर उतार कर F_2 के ऊपर रखें और इसे पूरा ढकने का प्रयास करें। इसके लिए आकृतियों को घुमाना, हिलाना-डुलाना पड़ सकता है। सर्वांगसमता की जाँच के लिए, हमें केवल निम्न प्रकार की गतियों की ही छूट है:

आकृति 11.1

(i) तल में, घुमाए बिना सरकाना या स्थानांतरण करना।

(ii) तल में, एक बिंदु के प्रति (गिर्द) घुमाना।

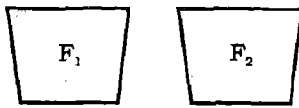
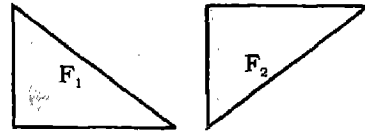
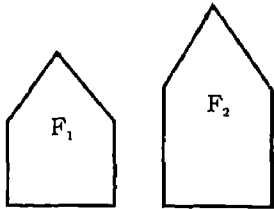
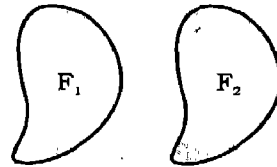
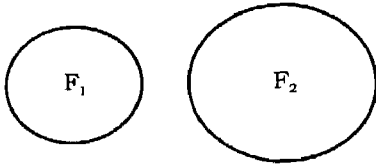
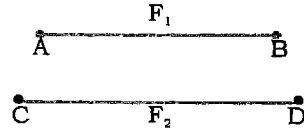
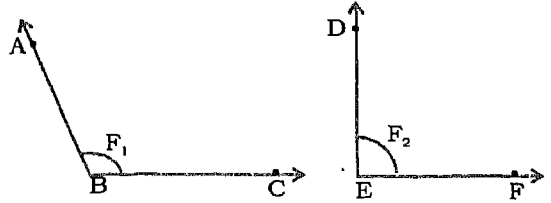
(iii) तल में से उठाकर और पलट कर वापस तल में रखना, जिससे ऊपर का भाग नीचे तथा नीचे का भाग ऊपर हो जाए।

इसके अतिरिक्त न तो खींचने-सिकोड़ने की छूट है और न तोड़ने-मरोड़ने की।

ऊपर बताई गई तीन प्रकार की गतियों (i) से (iii) द्वारा यदि F_1, आकृति F_2 को पूर्णतया ढक लेती है, तो इनके आकार और माप एक जैसे होने चाहिए। इस अवस्था में F_1 एवं F_2 एक दूसरे के सर्वांगसम कहलाएँगे।

दो आकृतियों की तुलना करने की इस विधि को *अध्यारोपण विधि* (*method of superposition*) कहते हैं। इस प्रकार,

तल में बनी दो आकृतियाँ F_1 *एवं* F_2 *तब सर्वांगसम कहलाती हैं, जब प्रत्येक, एक दूसरे के ऊपर रखी जाने पर, उसे पूर्णतया ढक ले।* 'सर्वांगसम है' को संकेत '$\cong$' से दर्शाते हैं। इस प्रकार, यदि F_1 एवं F_2 सर्वांगसम हैं, तो हम लिखेंगे $F_1 \cong F_2$ और पढ़ेंगे कि आकृति F_1 आकृति F_2 के सर्वांगसम है। ध्यान दीजिए यदि $F_1 \cong F_2$, तो $F_2 \cong F_1$ । अतः, हम कह सकते हैं कि F_1 एवं F_2 (एक दूसरे के) सर्वांगसम हैं। हम अब तक अनेक सर्वांगसम आकृतियों के बारे में जान चुके हैं। उदाहरणार्थ, जब हम एक रेखाखंड का समद्विभाजन करते हैं, तो हमें जो दो रेखाखंड प्राप्त होते हैं वे सर्वांगसम हैं। इसी प्रकार, कोण के अर्धक द्वारा भी दो सर्वांगसम कोण प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 1: आकृति 11.2 में, कुछ आकृति-युग्म दर्शाए गए हैं। अध्यारोपण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए कि उनमें से कौन-सी आकृतियाँ सर्वांगसम हैं।

आकृति 11.2

आकृति 11.2

हल: प्रत्येक युग्म में हम F_1 का अक्स बनाकर F_2 के ऊपर रखते हैं। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

(i) $F_1 \cong F_2$, क्योंकि F_1, F_2 को पूर्णतया ढक लेता है। अर्थात् F_1 तथा F_2 समान आकार एवं समान माप के हैं।

(ii) $F_1 \cong F_2$, क्योंकि घुमाव देने पर F_1, F_2 को पूरी तरह ढक लेता है। अर्थात् F_1 तथा F_2 समान आकार एवं समान माप के हैं।

(iii) F_1, F_2 के सर्वांगसम नहीं है, क्योंकि हमें जितनी भी गतियों की छूट है, उनमें से किसी के द्वारा भी F_1 को F_2 के ऊपर अध्यारोपित नहीं किया जा सकता। यहाँ F_1 एवं F_2 समान आकार के तो हैं, परंतु समान माप के नहीं हैं।

(iv) $F_1 \cong F_2$, क्योंकि F_1, F_2 को पूर्णतया ढक लेता है। अत: F_1 और F_2 समान आकार तथा समान माप के हैं।

(v) F_1, F_2 के सर्वांगसम नहीं है, क्योंकि F_1, F_2 पर अध्यारोपित नहीं हो सकता। यहाँ F_1 और F_2 का आकार समान है, परंतु माप समान नहीं हैं।

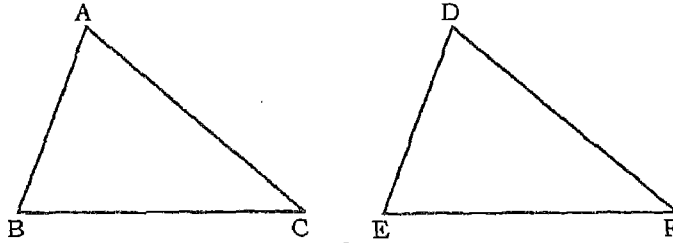
(vi) F_1, F_2 के सर्वांगसम नहीं है, क्योंकि रेखाखंड समान लंबाई के नहीं हैं।

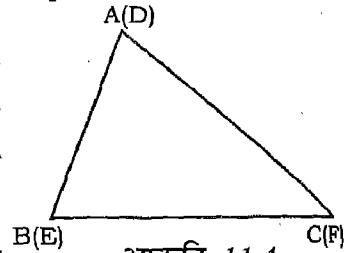
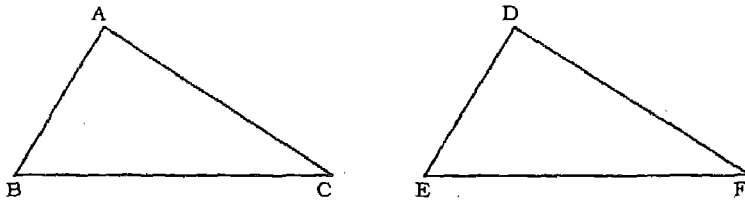
(vii) $F_1 \cong F_2$, क्योंकि आयत समान माप के हैं।

(viii) F_1, F_2 के सर्वांगसम नहीं है, क्योंकि दोनों कोणों के माप भिन्न हैं।

टिप्पणी: 1. दो समान लंबाई वाले रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं। जब हम कहते हैं कि 'दो रेखाखंड बराबर हैं', तो हमारा तात्पर्य होता है कि 'दोनों रेखाखंड सर्वांगसम हैं।'
2. समान माप वाले दो कोण सर्वांगसम होते हैं। $\angle A \cong \angle B$ को सामान्यत: हम $\angle A = \angle B$ ही लिखते हैं।

11.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

मान लीजिए कि दो त्रिभुज ABC एवं DEF दिए हुए हैं (आकृति 11.3) और हम इनकी सर्वांगसमता की जाँच करना चाहते हैं। पहले की तरह, हम या तो ΔDEF को काटते हैं या इसका अक्स खींचते हैं। फिर अध्यारोपण विधि से हम यह देखते हैं कि क्या ये दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। यदि हाँ, तो वे सर्वांगसम होंगे अन्यथा नहीं।

आकृति 11.3

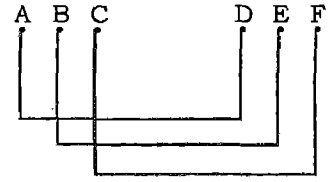
ध्यान दीजिए कि जब दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं (आकृति 11.4), तो ΔABC के शीर्ष ΔDEF के शीर्षों के संपाती होते हैं। इस प्रकार, दोनों त्रिभुजों ΔABC और ΔDEF के शीर्षों के बीच एक *सुमेलन* (*matching*) होता है। स्पष्ट है कि शीर्षों के बीच एक से अधिक सुमेलन हो सकते हैं। परंतु किसी एक सुमेलन में त्रिभुज सर्वांगसम हो सकते हैं और दूसरे किसी सुमेलन में वे सर्वांगसम नहीं भी हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, संकेतन '$\longleftrightarrow$' द्वारा आकृति 11.5 में हम ΔABC के

A(D)
B(E) C(F)

आकृति 11.4

आकृति 11.5

शीर्षों का सुमेलन ΔDEF के शीर्षों के साथ निम्न प्रकार कर सकते हैं (आकृति 11.6):

$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$

अर्थात्, $ABC \leftrightarrow DEF$ ।

ध्यान दीजिए कि सुमेलन में अक्षरों का क्रम महत्त्वपूर्ण है। इन दोनों त्रिभुजों ΔABC एवं ΔDEF के शीर्षों के बीच छः सुमेलन संभव हैं और ये सुमेलन हैं:

आकृति 11.6

$ABC \leftrightarrow DEF$ $\quad$ $ABC \leftrightarrow DFE$ $\quad$ $ABC \leftrightarrow EDF$

$ABC \leftrightarrow EFD$ $\quad$ $ABC \leftrightarrow FDE$ $\quad$ $ABC \leftrightarrow FED$

यदि इनमें से किसी भी सुमेलन में $\Delta ABC, \Delta DEF$ पर अध्यारोपित हो जाता है, तो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे। आकृति 11.5 में, दोनों त्रिभुज सुमेलन $ABC \leftrightarrow DEF$ के अंतर्गत अध्यारोपित होते हैं। इस प्रकार, ΔABC एवं ΔDEF सुमेलन $ABC \leftrightarrow DEF$ के अंतर्गत सर्वांगसम होते हैं। शेष सुमेलन सर्वांगसमता नहीं दर्शाते।

ध्यान दीजिए कि दो त्रिभुजों के शीर्षों के बीच सुमेलन से उनके भागों के बीच भी एक सुमेलन निर्धारित होता है। इस प्रकार, सुमेलन $ABC \leftrightarrow DEF$ से निम्न सुमेलन प्राप्त होते हैं:

(भुजा AB) $\leftrightarrow$ (भुजा DE),(भुजा BC) $\leftrightarrow$ (भुजा EF), (भुजा AC) $\leftrightarrow$ (भुजा DF)

$\angle A \leftrightarrow \angle D, \angle B \leftrightarrow \angle E, \angle C \leftrightarrow \angle F$ ।

सुमेलित भागों को त्रिभुज के *संगत भाग* (*corresponding parts*) भी कहते हैं।

अतः, जब हम कहते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है, तो हमारा अभिप्राय होगा कि ΔABC एवं ΔDEF, सुमेलन $ABC \leftrightarrow DEF$ के अंतर्गत सर्वांगसम हैं।

पुनः, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ का आशय है कि यदि $\Delta DEF, \Delta ABC$ पर इस प्रकार अध्यारोपित हो कि D, A के ऊपर; E, B के ऊपर तथा F, C के ऊपर हो, तो दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। इस स्थिति में,

$AB = DE$, $\quad$ $BC = EF$ $\quad$ और $\quad$ $AC = DF$;

$\angle A = \angle D$, $\quad$ $\angle B = \angle E$ $\quad$ और $\quad$ $\angle C = \angle F$ ।

अर्थात् सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत भाग बराबर होते हैं।

हम सरलता से देख सकते हैं कि इस कथन का विलोम भी सत्य होता है। अर्थात् यदि किन्हीं दो त्रिभुजों के शीर्षों के बीच एक सुमेलन हो, जिसमें त्रिभुजों के सभी संगत भाग बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

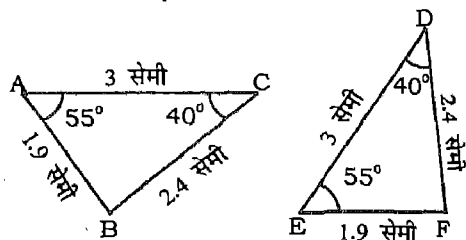
उदाहरण 2: आकृति 11.7 में, दो सर्वांगसम त्रिभुजों की भुजाओं एवं कोणों के माप दिए हैं। सर्वांगसमता प्रदर्शित करने वाले सुमेलन का निर्धारण कीजिए।

हल: आकृति से स्पष्ट है कि

$\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle D$

अत:, $\angle B = \angle F$ है।

साथ ही, BC = DF, AB = EF और AC = ED है। इस प्रकार, अभीष्ट सुमेलन है:

ABC $\longleftrightarrow$ EFD

आकृति 11.7

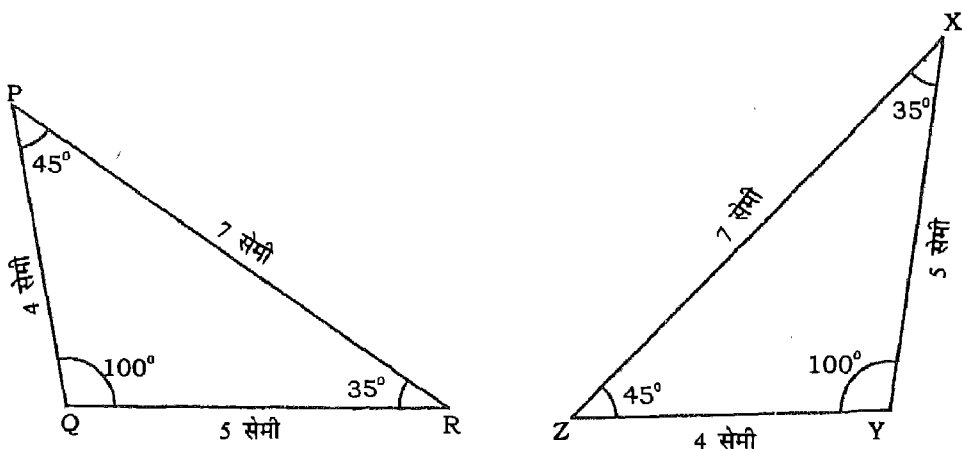
उदाहरण 3: आकृति 11.8 में, ΔPQR एवं ΔXYZ की भुजाओं एवं कोणों के माप दर्शाए गए हैं। ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन-सा कथन सत्य है:

(i) $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (ii) $\Delta PQR \cong \Delta ZYX$ (iii) $\Delta PQR \cong \Delta YXZ$

हल: आकृति 11.8 से स्पष्ट है कि

$\angle P = \angle Z$, $\angle Q = \angle Y$ एवं $\angle R = \angle X$;

साथ ही, PQ = ZY, QR = YX एवं PR = ZX है।

अत:, सुमेलन PQR $\longleftrightarrow$ ZYX से सर्वांगसमता प्राप्त होगी। इस प्रकार, कथन $\Delta PQR \cong \Delta ZYX$ सत्य है।

आकृति 11.8

11.4 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के प्रतिबंध

पिछले अनुच्छेद में, हमने सीखा था कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए आवश्यक है कि दोनों त्रिभुजों में संगत भुजाएँ एवं संगत कोण बराबर हों। हम देखेंगे कि इन सभी छः प्रतिबंधों की सत्यता की जाँच आवश्यक नहीं है। यदि कुछ प्रतिबंध सत्य हैं, तो शेष प्रतिबंध स्वयं ही सत्य हो जाते हैं।

यहाँ हम दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंधों की न्यूनतम संख्या प्राप्त करेंगे।

याद कीजिए कि त्रिभुज की रचना संभव है, यदि

(i) दो भुजाओं की माप तथा उनके बीच का कोण (SAS) ज्ञात है।

(ii) दो कोणों की माप तथा उनके बीच की भुजा (ASA) ज्ञात है।

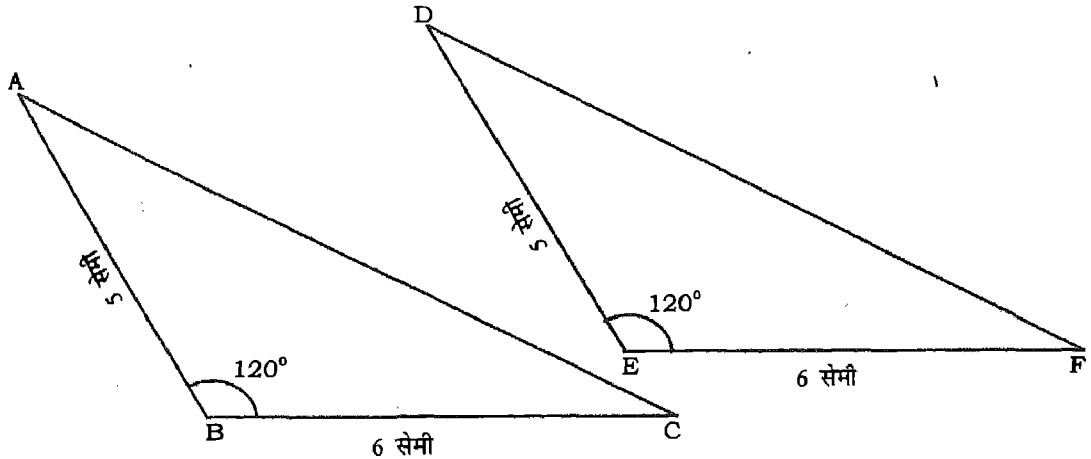
(iii) तीनों भुजाओं की माप (SSS) ज्ञात हैं।

(iv) समकोण, कर्ण तथा एक भुजा (RHS) ज्ञात है।

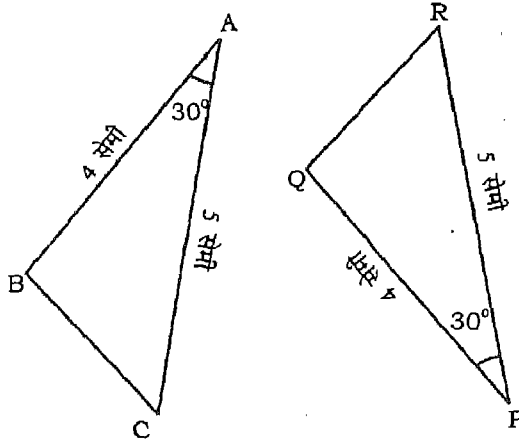
अब हम एक सी माप वाले दो त्रिभुज खींचेंगे और उनकी सर्वांगसमता पर विचार करेंगे।

11.4.1 भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता प्रतिबंध

क्रियाकलाप 1: एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 6 सेमी तथा इनके बीच का कोण B = 120° हो। एक दूसरा त्रिभुज DEF खींचिए, जिसमें DE = 5 सेमी EF = 6 सेमी तथा इनके बीच का कोण E = 120° हो। इस प्रकार,

AB = DE, BC = EF तथा बीच के (अंतर्गत) कोण $\angle B = \angle E$ हैं (आकृति 11.9)।

आकृति 11.9

ΔDEF का एक अक्स कागज पर अक्स बनाइए तथा उसे ΔABC के ऊपर इस प्रकार रखिए कि A, D पर; B, E पर तथा C, F पर रहे। ΔDEF, ΔABC को पूर्णरूपेण ढक लेता है तथा $ABC \leftrightarrow DEF$ संगत सुमेलन है। इस प्रकार, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है।

क्रियाकलाप 2: ΔABC खींचिए, जिसमें AB = 4 सेमी AC = 5 सेमी तथा $\angle A = 30°$ हो। एक दूसरा ΔPQR खींचिए, जिसमें PQ = 4 सेमी, PR = 5 सेमी तथा $\angle P = 30°$ हो।

आकृति 11.10

इस प्रकार, आकृति 11.10 में,

$$AB = PQ, AC = PR \text{ तथा } \angle A = \angle P \text{ है।}$$

त्रिभुज के अन्य भागों को मापिए तथा निम्न सारणी के रूप में लिखिए:

ΔABC के शेष भाग	*ΔPQR के संगत भाग*	*अंतर*
BC =	QR =	BC − QR =
$\angle B$ =	$\angle Q$ =	$\angle B - \angle Q$ =
$\angle C$ =	$\angle R$ =	$\angle C - \angle R$ =

हम पाते हैं कि सभी अंतर $(BC - QR)$, $(\angle B - \angle Q)$ और $(\angle C - \angle R)$ या तो शून्य हैं या नगण्य।

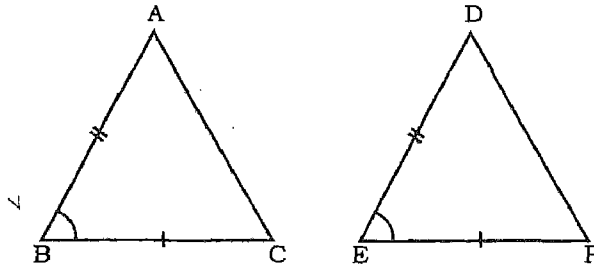
इस प्रकार, $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ है।

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ।

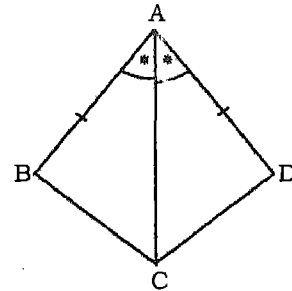
इस प्रकार, हमने दोनों क्रियाकलापों में देखा कि दो त्रिभुजों में यदि एक की दो भुजाएँ तथा उनके बीच के कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा उनके बीच के कोण के बराबर हैं, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इस तथ्य को हम निम्न प्रकार लिखते हैं:

यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो, तो ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

यह भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता प्रतिबंध कहलाता है।

आकृति 11.11

टिप्पणी: भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता प्रतिबंध में कोण दोनों दी हुई भुजाओं के बीच स्थित होना चाहिए। उदाहरणार्थ, आकृति 11.11 में, ΔABC एवं ΔDEF की सर्वांगसमता के लिए $AB = DE$ और $BC = EF$ के साथ हमें चाहिए $\angle B$ (भुजाओं AB एवं BC के बीच का कोण) $= \angle E$ (भुजाओं DE एवं EF के बीच का कोण)।

उदाहरण 4: आकृति 11.12 में, $AB = AD$ तथा $\angle BAC = \angle DAC$ है। एक तीसरा संगत युग्म प्राप्त कीजिए, जिससे SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ हो।

आकृति 11.12

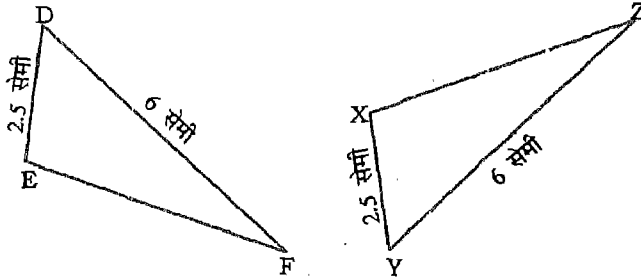
हल: ΔABC एवं ΔADC में,

$AB = AD$ (दिया है)

तथा $\angle BAC = \angle DAC$ (दिया है)

अतः, SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अनुसार दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम होने के लिए, $AC = AC$ होना चाहिए। अतः, वांछित तीसरा युग्म AC और AC, अर्थात् उभयनिष्ठ भुजा AC है।

प्रश्नावली 11.1

1. ΔDEF एवं ΔYXZ में, $DE = YX$ और $DF = YZ$ दिया है (आकृति 11.13)। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत त्रिभुजों को सर्वांगसम दिखाने के लिए और क्या सूचना चाहिए?

आकृति 11.13

2. यदि ΔABC एवं ΔDEF में, सुमेलन $CAB \leftrightarrow EDF$, इन दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाता है, तो निम्न में से सत्य कथन कौन-से हैं?

   (i) $AC = DE$ (ii) $\angle A = \angle F$ (iii) $\angle B = \angle F$

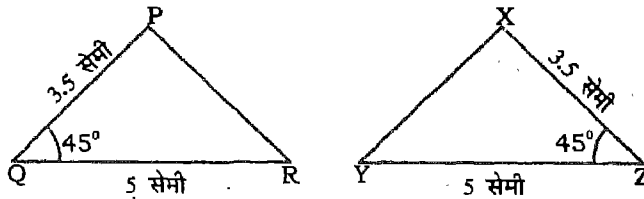
   (iv) $BC = DE$ (v) $AB = EF$ (vi) $\angle C = \angle E$

   (vii) $AB = DF$ (viii) $\angle A = \angle D$

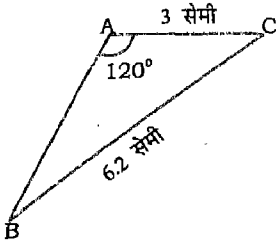
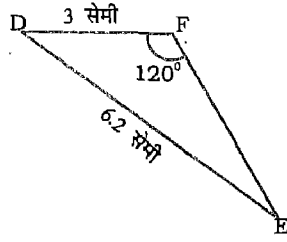
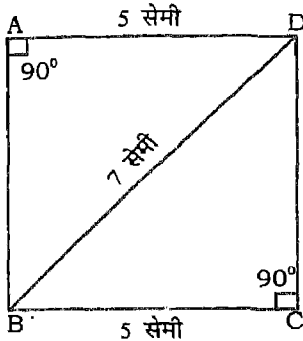
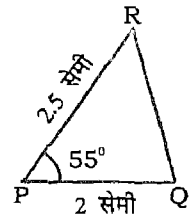
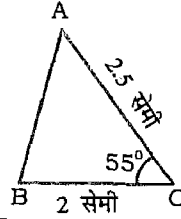
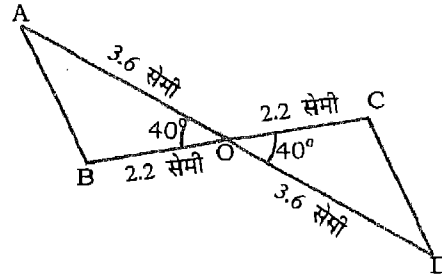
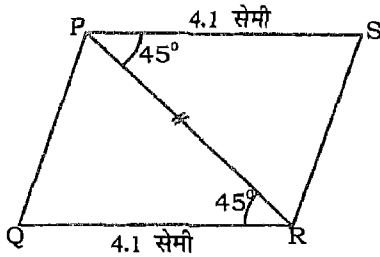
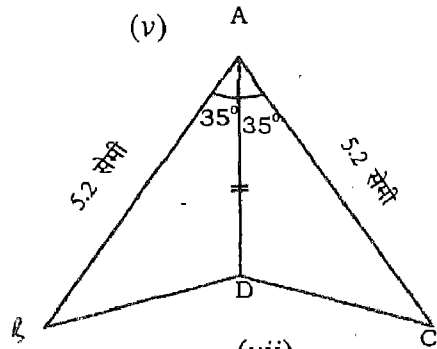
3. सुमेलन $QPR \leftrightarrow ZYX$, ΔPQR एवं ΔXYZ में सर्वांगसमता स्थापित करता है। निम्न कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

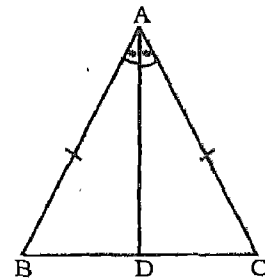
   (i) $\angle R$ = ______ (ii) QR = ________ (iii) $\angle P$ = _______

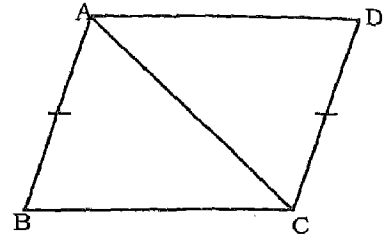
   (iv) QP = ______ (v) $\angle Q$ = ________ (vi) RP = _______

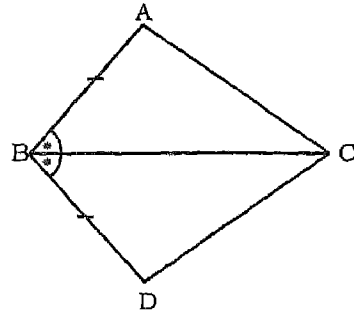
4. आकृति 11.14 में, SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत कौन-से त्रिभुज-युग्म सर्वांगसम हैं? ऐसे त्रिभुजों को सर्वांगसमता संकेत द्वारा दर्शाइए।

(*i*)

आकृति 11.14

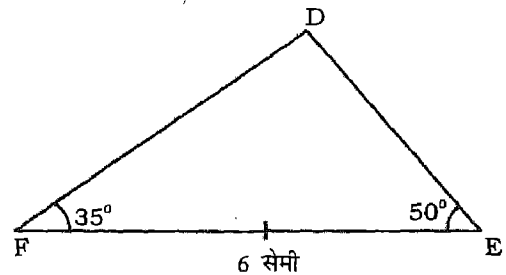
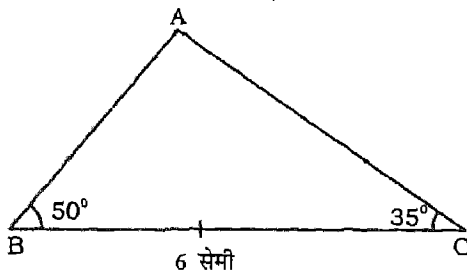
(**संकेत:** $\Delta PQR \cong \Delta XZY$)

(*ii*) (*iii*)

(*iv*) (*v*)

(*vi*) (*vii*)

आकृति 11.14

5. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है (आकृति 11.15)। रेखाखंड AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है तथा आधार BC के साथ D पर मिलता है। संगत भागों का तीसरा युग्म प्राप्त कीजिए, जिससे SAS प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ हो जाए। क्या संबंध $BD = DC$ सत्य है?

आकृति 11.15

6. आकृति 11.16 में, AB || DC तथा AB = DC है।
   (i) क्या ∠BAC = ∠DCA है? क्यों?
   (ii) क्या SAS प्रतिबंध के अंतर्गत ΔABC ≅ ΔCDA है?
   (iii) (ii)के उत्तर में प्रयुक्त तीनों तथ्यों को लिखिए।

आकृति 11.16

7. आकृति 11.17 में, AB = BD है तथा रेखाखंड BC, ∠ABD का समद्विभाजक है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत कौन-सा कथन सत्य है और क्यों?
   (i) ΔABC ≅ ΔDCB ।
   (ii) ΔABC ≅ ΔBCD ।
   (iii) ΔABC ≅ ΔDBC ।

आकृति 11.17

11.4.2 कोण-भुजा-कोण (ASA) सर्वांगसमता प्रतिबंध

क्रियाकलाप 3: एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 6 सेमी, ∠B = 50° एवं ∠C = 35° हो। एक दूसरा त्रिभुज DEF खींचिए, जिसमें EF = 6 सेमी, ∠E = 50° तथा

आकृति 11.18

∠F = 35° हो। इस प्रकार, हमें प्राप्त है:

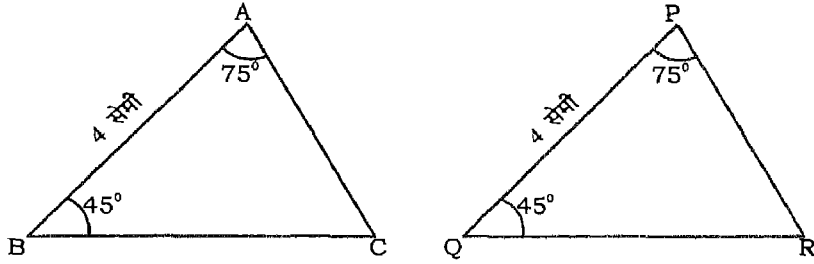
BC = EF, ∠B = ∠E और ∠C = ∠F (आकृति 11.18)।

ΔDEF का एक अक्स उतारिए तथा इसे ΔABC पर रखिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि यदि D, A के ऊपर E, B के ऊपर और F, C के ऊपर हो, तो ΔDEF, ΔABC को पूर्णतया ढक लेता है। इसी प्रकार, यदि ΔABC को ΔDEF के ऊपर रखते हैं, तो हम

देखते हैं कि $\Delta ABC, \Delta DEF$ को पूर्ण रूप से ढक लेता है। अर्थात् सुमेलन $ABC \longleftrightarrow DEF$ के अंतर्गत दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लेते हैं।

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

क्रियाकलाप 4: एक ΔABC बनाइए, जिसमें $AB = 4$ सेमी, $\angle A = 75^\circ$ तथा $\angle B = 45^\circ$ हो। इसी प्रकार, एक दूसरा त्रिभुज PQR बनाइए, जिसमें $PQ = 4$ सेमी, $\angle P = 75^\circ$ तथा $\angle Q = 45^\circ$ हो। इस प्रकार, हमें प्राप्त है:

$AB = PQ, \angle A = \angle P$ तथा $\angle B = \angle Q$ (आकृति 11.19)।

आकृति 11.19

दोनों त्रिभुजों के शेष भागों को मापिए तथा निम्न सारणी के रूप में भरिए:

ΔABC *के शेष भाग*	ΔPQR *के संगत भाग*	*अंतर*
$\angle C =$	$\angle R =$	$\angle C - \angle R =$
$AC =$	$PR =$	$AC - PR =$
$BC =$	$QR =$	$BC - QR =$

हम देखते हैं कि अंतर $(\angle C - \angle R)$, $(AC - PR)$ एवं $(BC - QR)$ या तो शून्य हैं या नगण्य। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

$$\angle C = \angle R, AC = PR \text{ तथा } BC = QR$$

अतः, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त दोनों क्रियाकलापों में हमने दो त्रिभुज इस प्रकार लिए कि एक त्रिभुज के दो कोण एवं उनकी अंतर्गत भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के संगत भागों के बराबर थे। दोनों बार हमने देखा कि त्रिभुज सर्वांगसम निकले। इस तथ्य को हम निम्न प्रकार लिखते हैं:

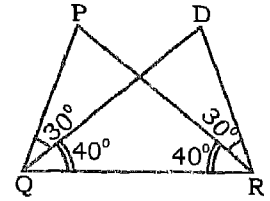
यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा क्रमशः किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे सर्वांगसमता का कोण-भुजा-कोण (ASA) *प्रतिबंध कहते हैं।*

टिप्पणी: त्रिभुज के कोणों का योग 180° होने के कारण, त्रिभुज के दो कोण ज्ञात होने पर तीसरा कोण स्वत: ही निकाला जा सकता है। इसलिए यदि *किसी त्रिभुज की कोई-सी एक भुजा एवं दो कोण दिए हों, तो तीसरा कोण (यदि आवश्यकता हो तो) निकालकर उन्हें दो कोणों एवं अंतर्गत भुजा के रूप में बदल सकते हैं और फिर ASA प्रतिबंध का प्रयोग कर सकते हैं।*

उदाहरण 5: आकृति 11.20 में, ΔPQR और ΔDQR एक ही आधार QR पर बने हैं। इन त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए ASA प्रतिबंध के अंतर्गत जिन तीन समिकाओं की आवश्यकता होगी उन्हें लिखिए। सर्वांगसमता संबंध को संकेतों में भी लिखिए।

हल: ΔPQR एवं ΔDRQ में,

$\angle PQR = \angle DRQ = 70°$ (दिया है)

$\angle PRQ = \angle DQR = 40°$ (दिया है)

आकृति 11.20

तथा QR दोनों में उभयनिष्ठ है।

अत:, सुमेलन $PQR \longleftrightarrow DRQ$ के अंतर्गत दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। अत:, ASA प्रतिबंध द्वारा $\Delta PQR \cong \Delta DRQ$ है।

उदाहरण 6: आकृति 11.21 में, संगत भागों के तीन युग्म बताइए, जिनसे ASA प्रतिबंध द्वारा $\Delta ABO \cong \Delta PQO$ होगा।

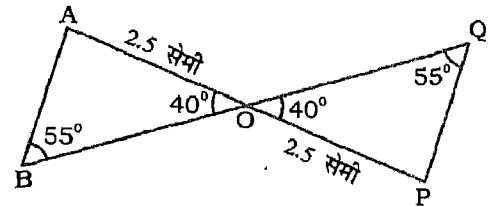
हल: ΔABO एवं ΔPQO में,

$\angle AOB = \angle POQ = 40°$ (दिया है) (1)

$\angle ABO = \angle PQO = 55°$ (दिया है)

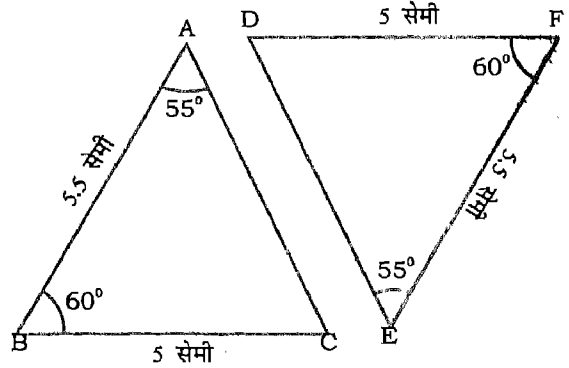
इस प्रकार, त्रिभुज के कोणों के योग के गुण से,

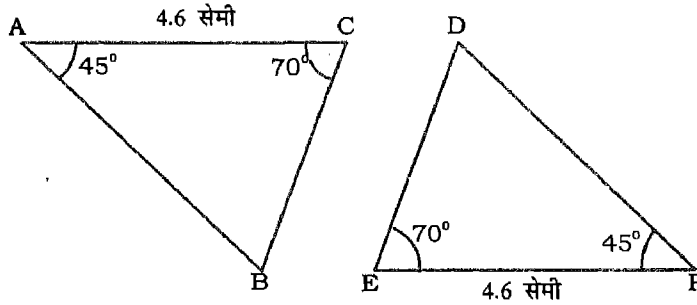
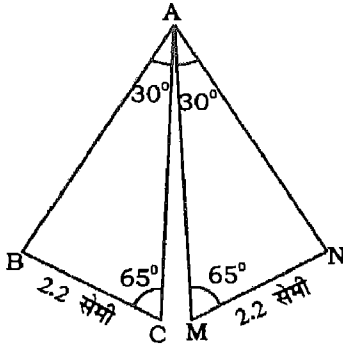
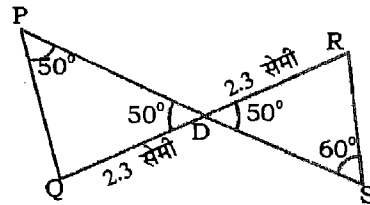
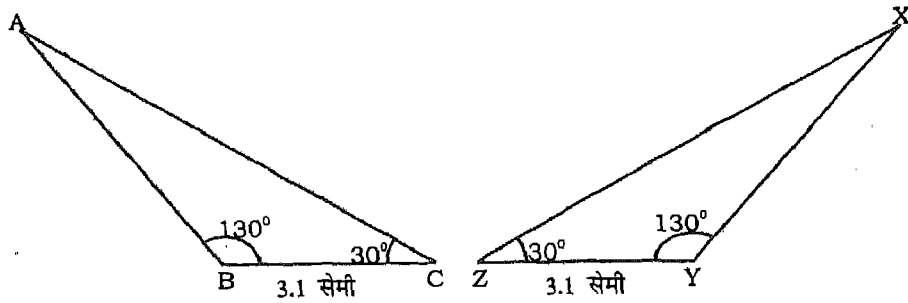
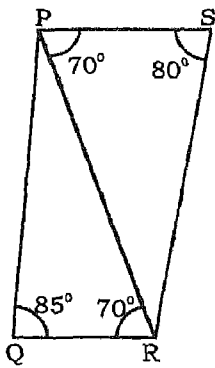
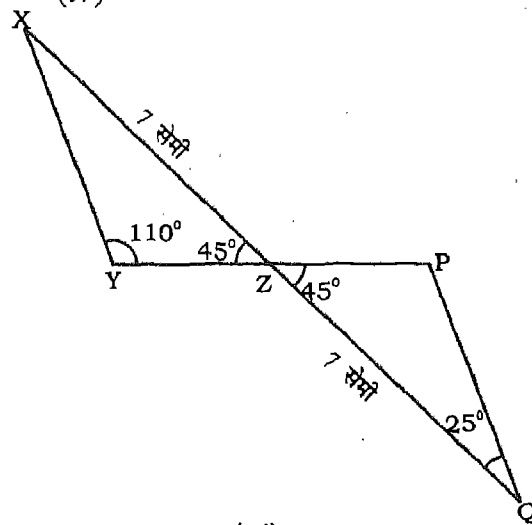
$\angle BAO = \angle QPO = 85°$ (2)

साथ ही, AO = OP = 2.5 सेमी (दिया है) (3)

आकृति 11.21

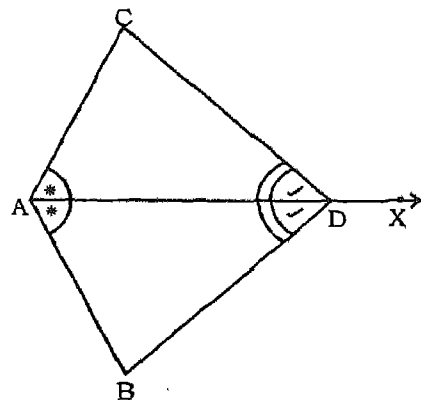
इस प्रकार (1), (2) एवं (3) से प्राप्त सुमेलन $ABO \longleftrightarrow PQO$ सर्वांगसमता स्थापित करता है। अत: ASA प्रतिबंध से $\Delta ABO \cong \Delta PQO$ ।

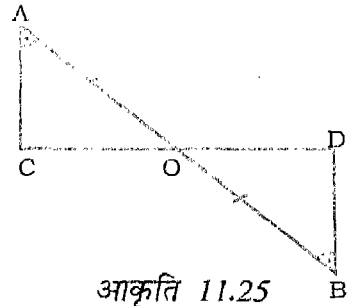
प्रश्नावली 11.2

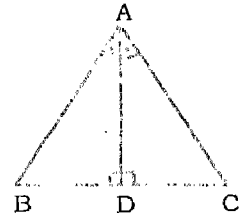
1. आकृति 11.22 में, $\angle A = \angle E = 55°$ एवं $\angle B = \angle F = 60°$ है। संगत भागों का तीसरा युग्म प्राप्त कीजिए, जिससे ASA के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ हो।

आकृति 11.22

2. आकृति 11.23 में, किन युग्मों के त्रिभुज, ASA प्रतिबंध के अंतर्गत सर्वांगसम हैं? सर्वांगसम त्रिभुजों को संकेतों द्वारा भी दर्शाइए।

(*i*)

(*ii*)

(*iii*)

(iv)

(v)

(vi)

आकृति 11.23

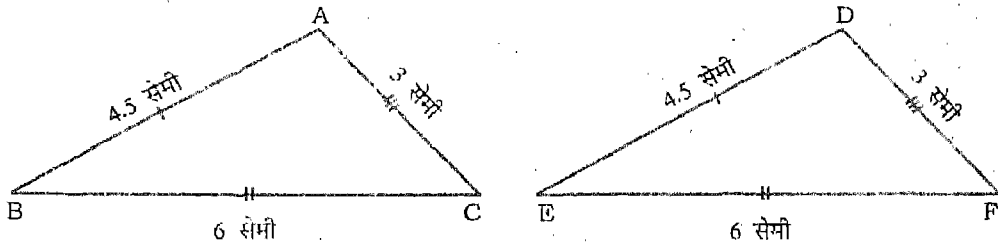
3. आकृति 11.24 में; AX, $\angle BAC$ एवं $\angle BDC$ का समद्विभाजक है। ASA प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ स्थापित करने के लिए, संगत भागों का तीसरा युग्म ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.24

4. आकृति 11.25 में, AO = BO तथा ∠A = ∠B है।
   (i) क्या ∠AOC = ∠BOD है? क्यों?
   (ii) क्या ASA प्रतिबंध के अंतर्गत ΔAOC ≅ ΔBOD है?
   (iii) (ii) के उत्तर में जिन तीन तथ्यों का उपयोग किया है, उन्हें लिखिए।
   (iv) क्या ∠ACO = ∠BDO है? क्यों?

आकृति 11.25

5. आकृति 11.26 में; AD, ∠A का समद्विभाजक है तथा AD ⊥ BC भी है।
   (i) क्या ASA प्रतिबंध के अंतर्गत ΔADB ≅ ΔADC है?
   (ii) यदि हाँ, तो वे तीनों तथ्य लिखिए, जो आपने (i) के उत्तर के लिए प्रयोग किए हैं।
   (iii) क्या BD = DC है? क्यों?

आकृति 11.26

11.4.3 भुजा-भुजा-भुजा (SSS) सर्वांगसमता प्रतिबंध

क्रियाकलाप 5: एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = 4.5 सेमी, BC = 6 सेमी तथा CA = 3 सेमी हो। एक दूसरा त्रिभुज DEF बनाइए, जिसमें DE = 4.5 सेमी, EF = 6 सेमी तथा FD = 3 सेमी हो। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

AB = DE, BC = EF एवं CA = FD (आकृति 11.27)।

आकृति 11.27

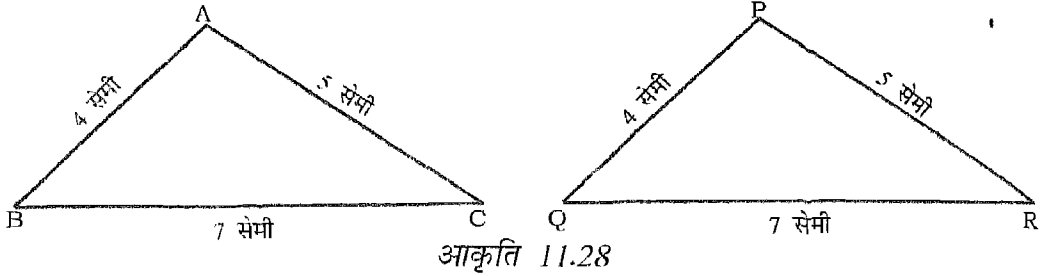
ΔDEF का एक अक्स खींचकर उसे ΔABC के ऊपर रखिए। आप क्या देखते हैं?

हम देखते हैं कि सुमेलन ABC ⟷ DEF के अंतर्गत दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं, अर्थात् ΔABC एवं ΔDEF सर्वांगसम हैं।

क्रियाकलाप 6: भुजाओं AB = 4 सेमी, BC = 7 सेमी तथा CA = 5 सेमी वाला एक त्रिभुज ABC खींचिए। इसी प्रकार, एक ΔPQR बनाइए, जिसमें PQ = 4 सेमी, QR = 7 सेमी तथा RP = 5 सेमी हो। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

AB = PQ, BC = QR एवं CA = RP (आकृति 11.28)।

A, B, C, 4 सेमी, 5 सेमी, 7 सेमी; P, Q, R, 4 सेमी, 5 सेमी, 7 सेमी

आकृति 11.28

अब इन त्रिभुजों के शेष भागों, अर्थात् तीनों कोणों को मापिए और अपने प्रेक्षणों को सारणीबद्ध कीजिए:

ΔABC *के शेष भाग*	ΔPQR *के संगत भाग*	*अंतर*
$\angle A =$	$\angle P =$	$\angle A - \angle P =$
$\angle B =$	$\angle Q =$	$\angle B - \angle Q =$
$\angle C =$	$\angle R =$	$\angle C - \angle R =$

प्रत्येक स्थिति में, हम देखते हैं कि अंतर $(\angle A - \angle P)$, $(\angle B - \angle Q)$ और $(\angle C - \angle R)$ या तो शून्य है या नगण्य। अतः,

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ तथा $\angle C = \angle R$ हुए।

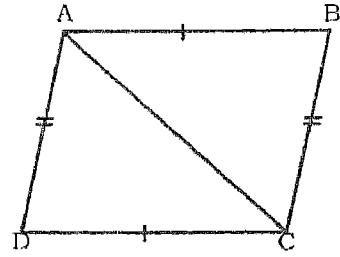
इस प्रकार, दोनों त्रिभुजों की सभी संगत भुजाएँ तथा सभी संगत कोण बराबर हैं। अतः, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अर्थात् $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त दोनों क्रियाकलापों में हमने जो त्रिभुज लिए, उनमें से एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर थीं। प्रत्येक स्थिति में, त्रिभुज सर्वांगसम निकले। इस तथ्य को हम इस प्रकार लिख सकते हैं:

यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः किसी दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो ये दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

यह सर्वांगसमता का भुजा-भुजा-भुजा (SSS) प्रतिबंध कहलाता है।

उदाहरण 7: आकृति 11.29 में, AB = DC एवं AD = BC है। संगत भागों का तीसरा युग्म प्राप्त कीजिए, जिससे SSS प्रतिबंध के अंतर्गत ΔABC एवं ΔCDA सर्वांगसम हों।

आकृति 11.29

हल: आकृति 11.29 में दिए गए त्रिभुजों में,

AB = DC (दिया है)

BC = DA (दिया है)

SSS सर्वांगसमता के लिए बची हुई तीसरी भुजा भी बराबर होनी चाहिए।

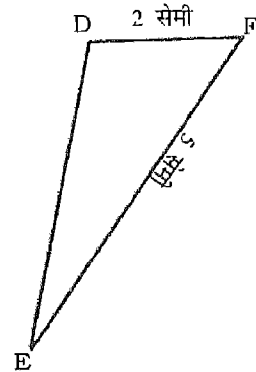
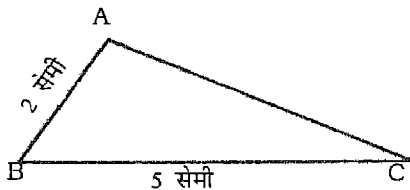
यहाँ भुजा AC दोनों त्रिभुजों ΔABC और ΔCDA में उभयनिष्ठ है।

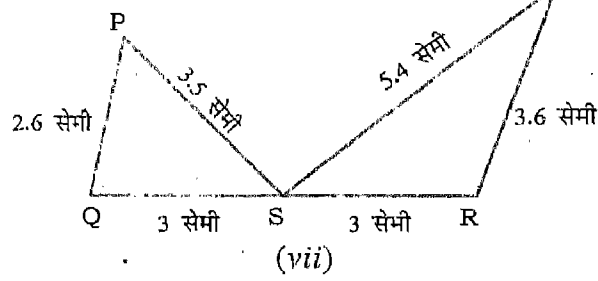
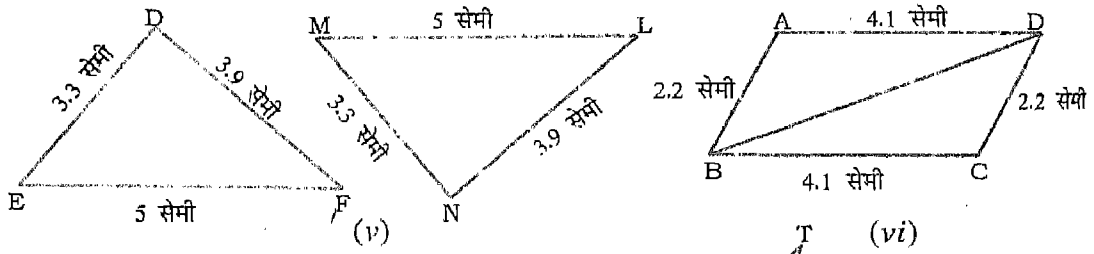
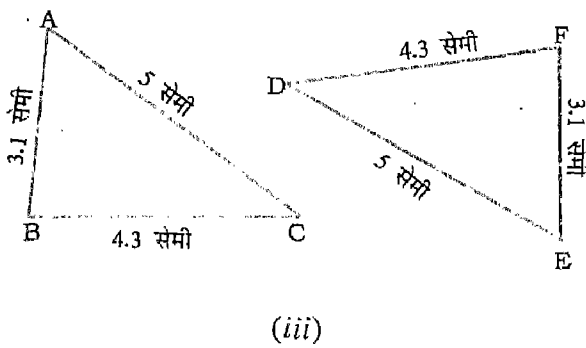
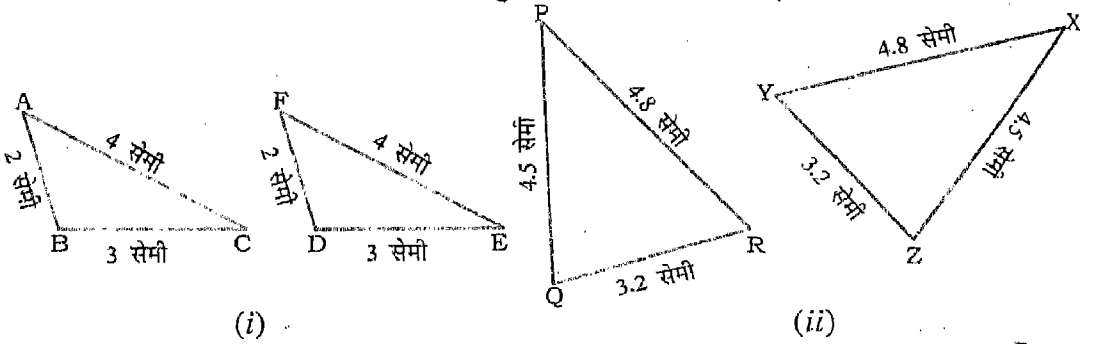
अत:, संगत भागों का तीसरा युग्म AC तथा CA है।

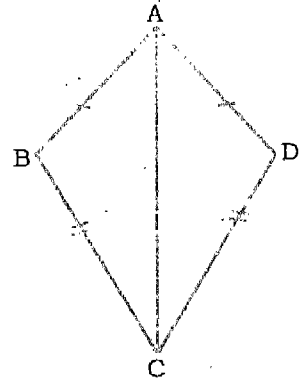
टिप्पणी: SSS प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है। यहाँ वांछित सुमेलन ABC $\longleftrightarrow$ CDA है।

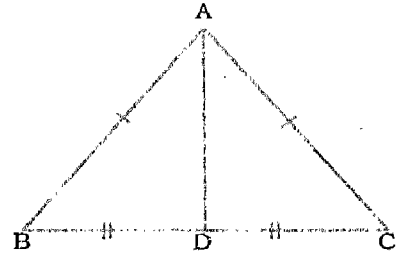
प्रश्नावली 11.3

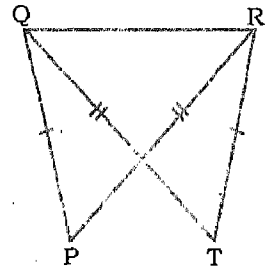
1. ΔABC एवं ΔDEF में, AB = DF तथा BC = EF है (आकृति 11.30)।

   SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध से दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, और क्या अतिरिक्त सूचना चाहिए?

आकृति 11.30

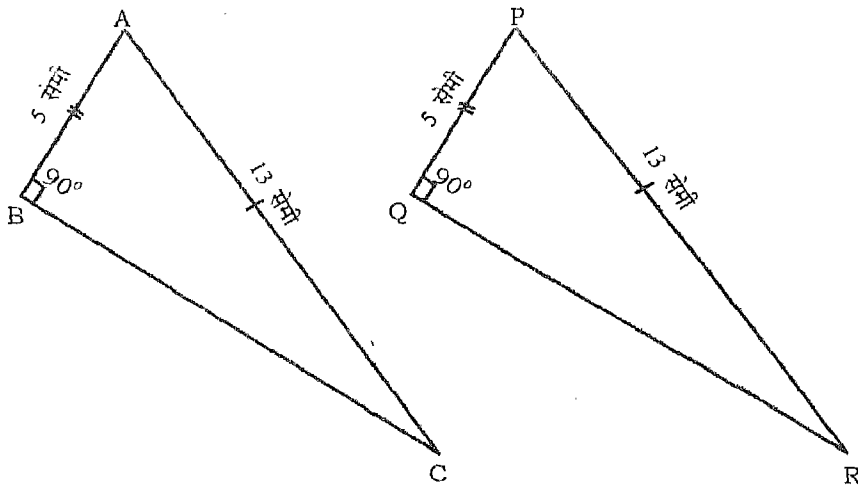
2. आकृति 11.31 में, बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज-युग्म SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत सर्वांगसम हैं? सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में भी लिखिए।

आकृति 11.31

3. आकृति 11.32 में, AB = AD तथा BC = DC है। संगत भागों का तीसरा युग्म प्राप्त कीजिए, जिससे SSS प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ हो जाए।

आकृति 11.32

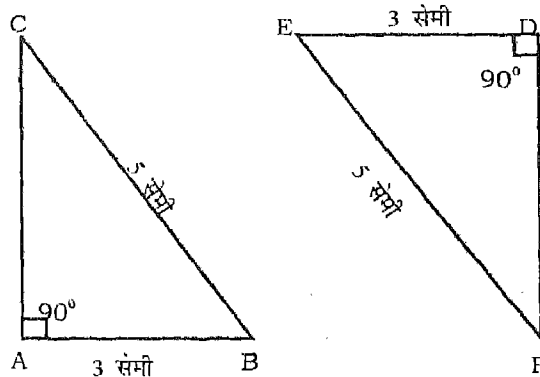
4. आकृति 11.33 में, ΔABC समद्विबाहु है, जिसमें AB = AC है। AD, शीर्ष A से सम्मुख भुजा BC पर माध्यिका है। SSS प्रतिबंध के अंतर्गत त्रिभुजों ΔADB एवं ΔADC के सर्वांगसम होने के लिए, संगत भागों का तीसरा युग्म प्राप्त कीजिए।

आकृति 11.33

5. ΔPQR एवं ΔTQR दोनों एक ही आधार QR बने हैं (आकृति 11.34)। साथ ही, PQ = TR तथा PR = TQ है। निम्न में से कौन-सा कथन सत्य है?
   (i) $\Delta PQR \cong \Delta TQR$ ।
   (ii) $\Delta PQR \cong \Delta TRQ$ ।
   (iii) $\Delta PQR \cong \Delta RQT$ ।

आकृति 11.34

11.4.4 समकोण-कर्ण-भुजा (RHS) सर्वांगसमता प्रतिबंध

क्रियाकलाप 7: एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $\angle B$ समकोण, AB = 5 सेमी तथा कर्ण AC = 13 सेमी है। एक दूसरा समकोण त्रिभुज ΔPQR खींचिए, जिसमें $\angle Q$ समकोण, PQ = 5 सेमी तथा कर्ण PR = 13 सेमी हो। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है: $\angle B = \angle Q = 90°$, भुजा AB = भुजा PQ तथा कर्ण AC = कर्ण PR (आकृति 11.35)।

आकृति 11.35

त्रिभुज PQR का एक अक्स बनाइए तथा इससे ΔABC को ढकने का प्रयास कीजिए। हम देखते हैं कि P को A पर, Q को B पर तथा R को C पर रखने से, दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णतया ढंक लेते हैं। इस प्रकार, सुमेलन $ABC \longleftrightarrow PQR$ के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है।

क्रियाकलाप 8: एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $\angle A = 90°$, कर्ण $BC = 5$ सेमी एवं भुजा $AB = 3$ सेमी हो। इसी प्रकार, एक दूसरा त्रिभुज DEF खींचिए, जिसमें $\angle D = 90°$, कर्ण $EF = 5$ सेमी तथा भुजा $DE = 3$ सेमी है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है: $\angle A = \angle D = 90°$, कर्ण $BC =$ कर्ण EF तथा भुजा $AB =$ भुजा DE (आकृति 11.36)।

आकृति 11.36

दोनों त्रिभुजों के शेष भागों को मापिए तथा अपने प्रेक्षण निम्न सारणी के रूप में लिखिए:

ΔABC *के शेष भाग*	ΔDEF *के संगत भाग*	*अंतर*
$\angle B =$ $\angle C =$ $AC =$	$\angle E =$ $\angle F =$ $DF =$	$\angle B - \angle E =$ $\angle C - \angle F =$ $AC - DF =$

आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में अंतर $(\angle B - \angle E)$, $(\angle C - \angle F)$ और $(AC - DF)$ या तो शून्य है या नगण्य। इस प्रकार,

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ तथा भुजा $AC =$ भुजा DF

इस प्रकार, हम देखते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है। ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए दोनों क्रियाकलापों में, हमने अपने समकोण त्रिभुज इस प्रकार लिए थे कि एक का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे के कर्ण और एक भुजा के बराबर थे। दोनों बार हमारे त्रिभुज सर्वांगसम निकले। इस तथ्य को हम निम्न प्रकार लिखते हैं:

यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इस *सर्वांगसमता प्रतिबंध* को *समकोण–कर्ण–भुजा* (RHS) *सर्वांगसमता प्रतिबंध* कहते हैं।

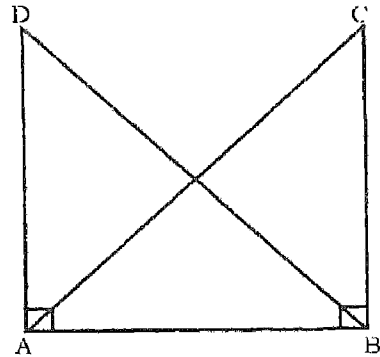
उदाहरण 8: आकृति 11.37 में, $AC = BD$, $DA \perp AB$ तथा $CB \perp AB$ है। वे तीन तथ्य लिखिए जिन्हें प्रयोग कर RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ हो जाए।

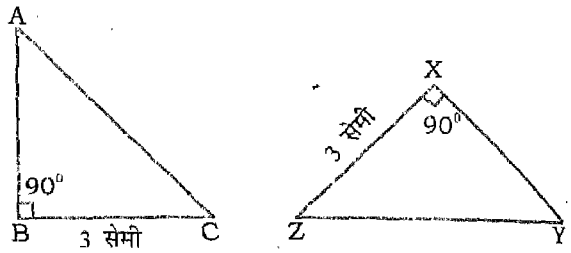
आकृति 11.37

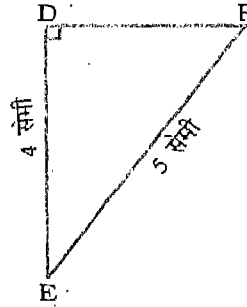
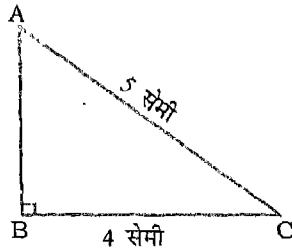
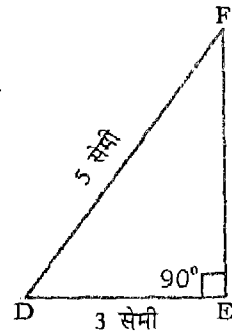
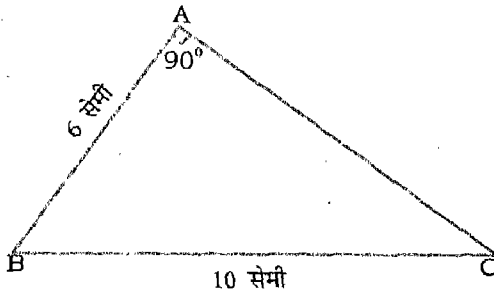
हल: ΔABC एवं ΔBAD में,

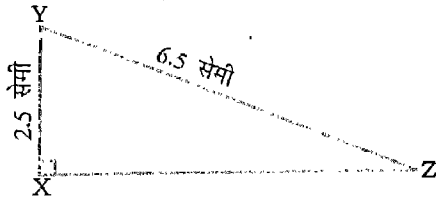
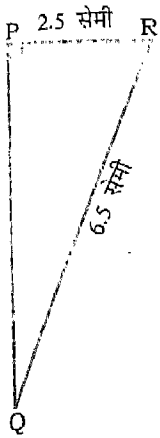
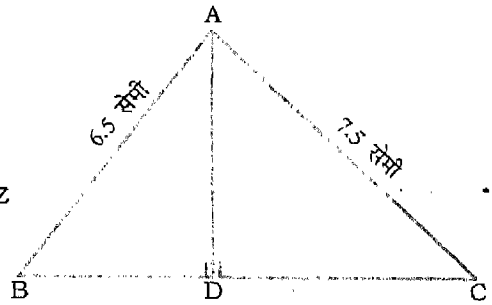
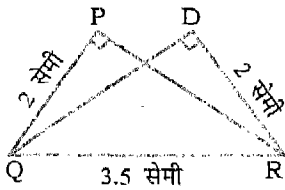
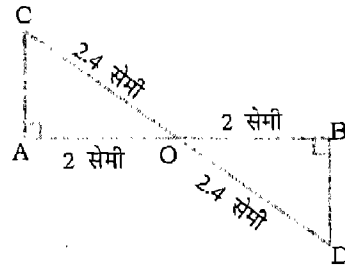
कर्ण $AC =$ कर्ण BD (दिया है)

$\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ (दिया है)

साथ ही, भुजा AB दोनों में उभयनिष्ठ है।
ध्यान दीजिए इसे $AB = BA$ लिखा जाएगा।
अतः, सुमेलन $ABC \longleftrightarrow BAD$ द्वारा दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हुए।
अर्थात् RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ ।

प्रश्नावली 11.4

1. आकृति 11.38 में, $\angle B = \angle X = 90°$ तथा भुजा BC = भुजा XZ है। इसमें अतिरिक्त क्या और सूचना चाहिए, जिसे प्रयोगकर RHS प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta YXZ$ हो जाए?

आकृति 11.38

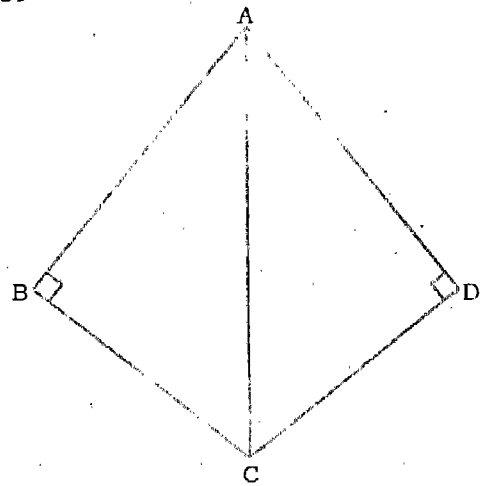
2. आकृति 11.39 में, RHS प्रतिबंध के अंतर्गत किन युग्मों के त्रिभुज सर्वांगसम हैं? सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में लिखिए।

(*i*)

(*ii*)

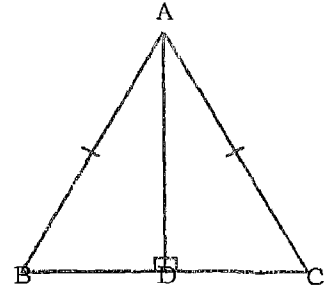
आकृति 11.39

(iii) (iv)

(v) (vi)

आकृति 11.39

3. आकृति 11.40 में, AB = AD, AD ⊥ CD तथा AB ⊥ BC है।

(i) संगत भागों का तीसरा युग्म प्राप्त कीजिए, जिससे RHS प्रतिबंध के अंतर्गत ΔABC ≅ ΔADC हो जाए।

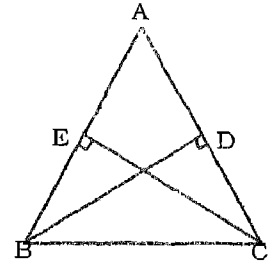
(ii) क्या BC = DC है? क्यों?

आकृति 11.40

4. आकृति 11.41 में, ΔABC समद्विबाहु है, जिसमें $AB = AC$ है। AD, A से BC पर शीर्षलंब है।

(i) क्या RHS प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ है?

(ii) संगत भागों के वे तीन युग्म लिखिए, जो (i) के उत्तर में प्रयुक्त हुए हैं।

(iii) क्या $BD = DC$ है? क्यों?

आकृति 11.41

5. ΔABC में, शीर्षलंब BD एवं CE बराबर हैं (आकृति 11.42)। संगत भागों के वे तीन युग्म प्राप्त कीजिए, जिनके कारण RHS प्रतिबंध के अंतर्गत ΔBCD एवं ΔCBE सर्वांगसम हैं।

आकृति 11.42

विविध प्रश्नावली

1. रिक्त स्थान भरिए:

(a) यदि $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ है, तो

(i) $AB = \ldots$ (ii) $BC = \ldots$

(iii) $AC = \ldots$ (iv) $\angle A = \ldots$

(v) $\angle B = \ldots$ (vi) $\angle C = \ldots$

(b) ΔPQR में भुजाओं PR एवं QR के अंतर्गत कोण है ....।

(c) ΔDEF में $\angle E$ एवं $\angle F$ की अंतर्गत भुजा है ....।

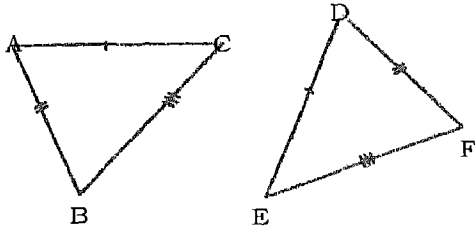
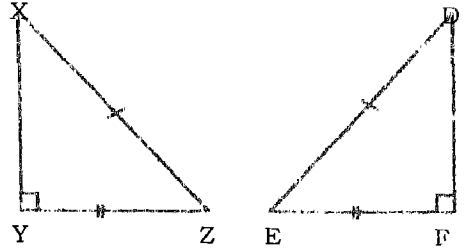
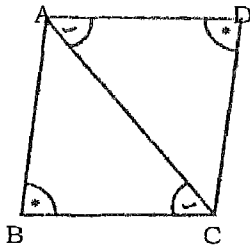
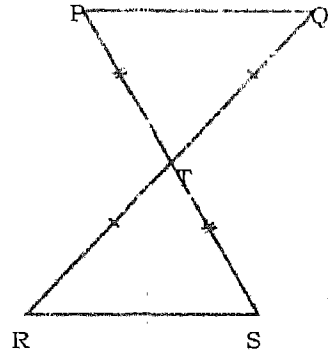
(d) यदि $AB = QP$, $\angle B = \angle P$, $BC = PR$ है, तो .... सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta QPR$ है।

(e) यदि $\angle A = \angle R$, $\angle B = \angle P$, $AB = RP$ है, तो .... सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ है।

2. आकृति 11.43 में, त्रिभुज-युग्मों में समान संगत भाग एक जैसे चिह्नों से दर्शाए गए हैं। बताइए सर्वांगसमता के किस प्रतिबंध के अंतर्गत युग्म के दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता प्रगट करने वाले सुमेलन को भी बताएँ।

A C B D E F (*i*)

X Y Z D E F (*ii*)

A D B C (*iii*)

P Q T R S (*iv*)

आकृति 11.43

3. आकृति 11.44 के प्रत्येक त्रिभुज-युग्म में, बराबर संगत भागों को समान चिह्नों से दर्शाया गया है। यदि युग्म के त्रिभुज सर्वांगसम हैं, तो सर्वांगसमता प्रतिबंध (SAS, ASA, SSS या RHS) लिखिए।

आकृति 11.44

L M N E D F

(iii)

B A D C

(iv)

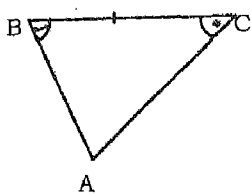
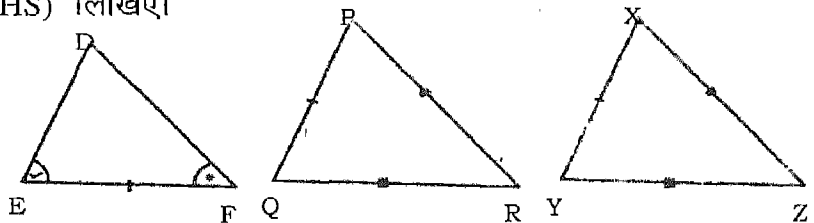
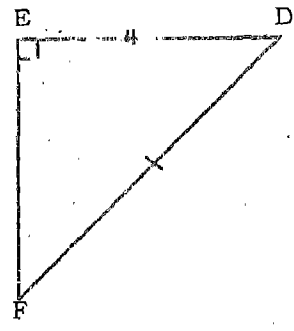
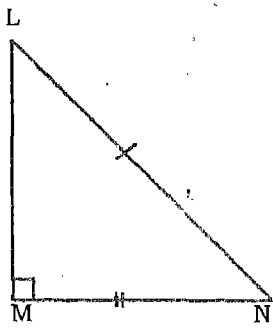
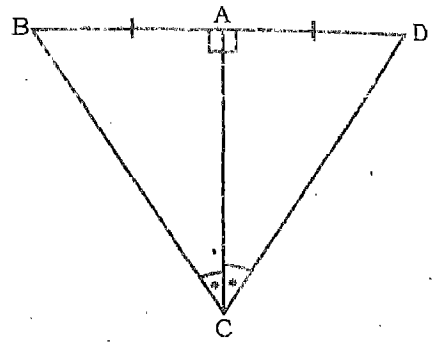
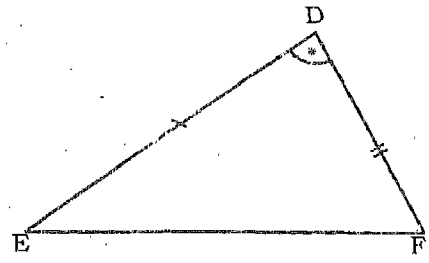
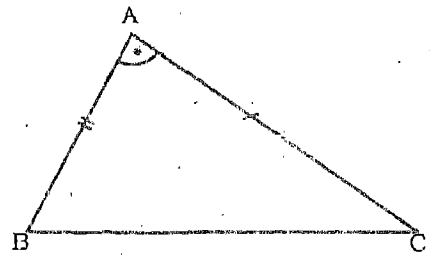
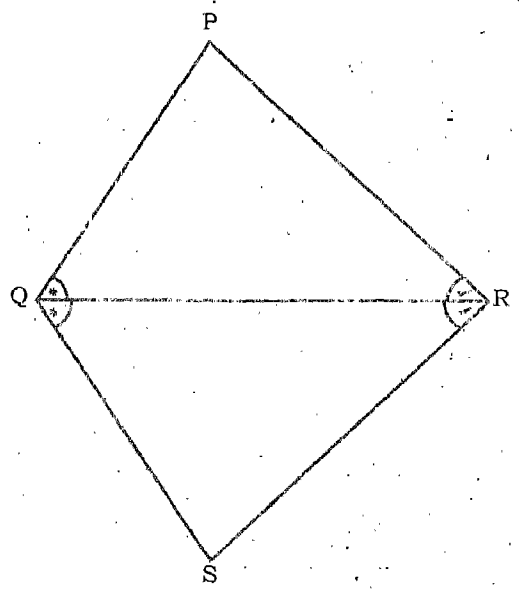
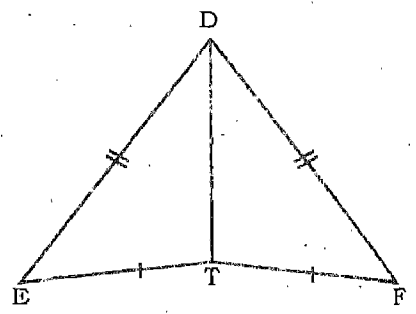
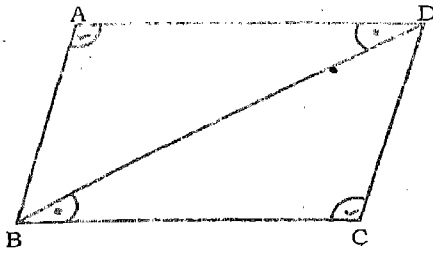
A B C D E F

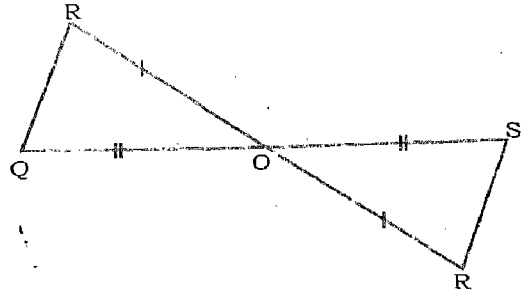
(v)

P Q R S

(vi)

D E T F

(vii)

आकृति 11.44

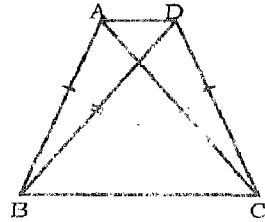
(*viii*)

(*ix*)

आकृति 11.44

4. आकृति 11.45 में, ΔABC और ΔDBC दो त्रिभुज हैं, जिनका उभयनिष्ठ आधार BC है। बिंदु A तथा D भुजा BC के एक ही ओर इस प्रकार स्थित हैं कि $AB = DC$ और $DB = AC$ है। ΔADB तथा ΔDAC के उन संगत भागों को बताइए, जिससे

$\Delta ADB \cong \Delta DAC$ हो।

सर्वांगसमता के लिए आपने किस प्रतिबंध का उपयोग किया है?

यदि $\angle DCA = 40°$ और $\angle BAD = 100°$ है, तो $\angle ADB$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.45

याद रखने योग्य बातें

1. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनके आकार एवं माप समान हैं।
2. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि उनके शीर्षों के एक सुमेलन के अंतर्गत एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ और तीनों कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और कोणों के बराबर हैं।
3. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके बीच के कोण के बराबर हैं (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध)।
4. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके बीच की भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनके बीच की भुजा के बराबर हैं (ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध)।
5. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हैं (SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध)।
6. दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज का कर्ण और कोई एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हैं (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध)।

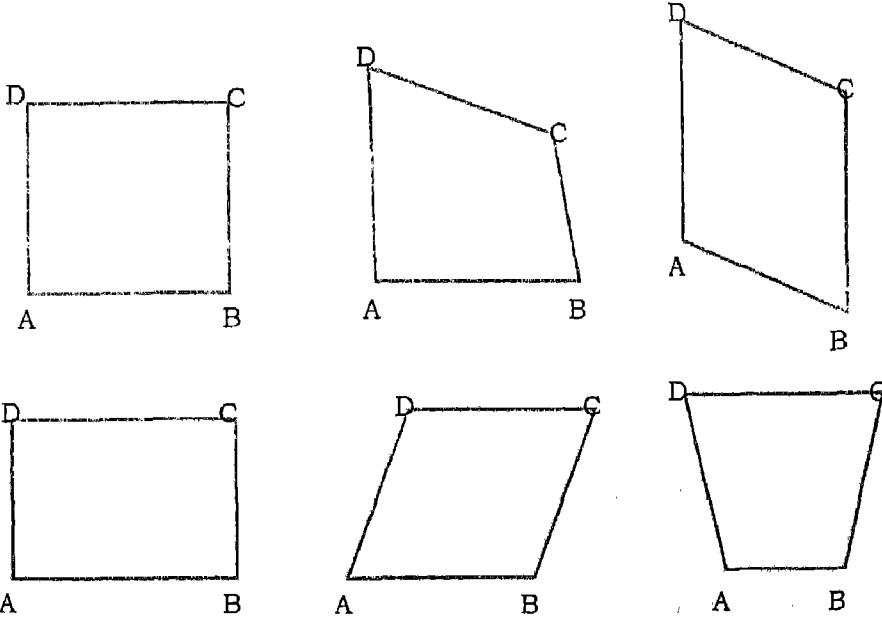
चतुर्भुज

अध्याय 12

12.1 भूमिका

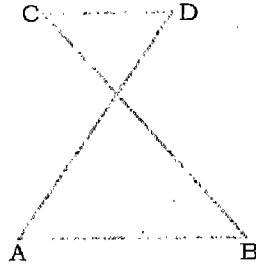
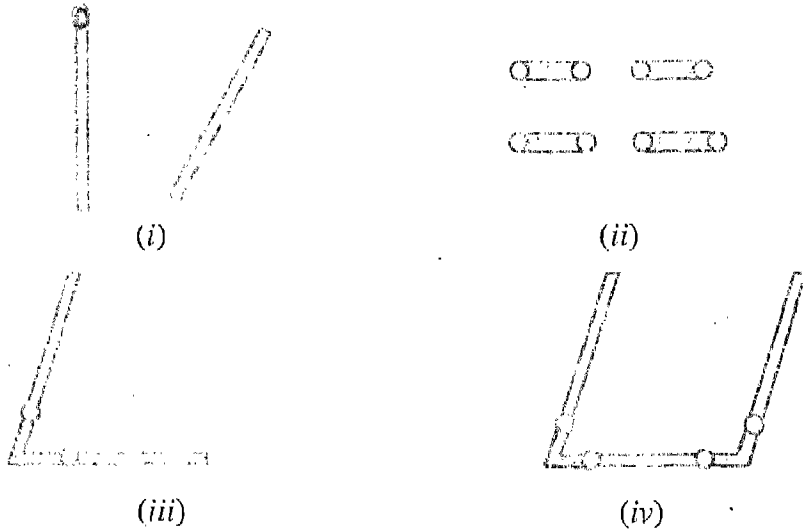
चतुर्भुज हमारे परिवेश में पाई जाने वाली एक सामान्य ज्यामितीय संरचना है। यदि हम अपने आस-पास देखें, तो किसी न किसी रूप में, जैसे-वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज, समलंब के रूप में चतुर्भुज दिखाई दे जाएगा। इन आकृतियों को पहचानने तथा इनके गुणों को जानने के लिए, हम चतुर्भुज की कुछ मूल अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे।

12.2 चतुर्भुज

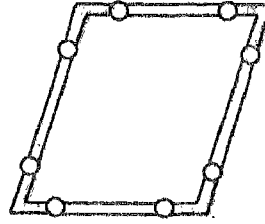
कक्षा में बैठ कर यदि हम मेज का ऊपरी तल, छत, दरवाजे, फर्श आदि की ओर देखें, तो सभी चतुर्भुज की याद दिलाएँगे। गणित की भाषा में चार रेखाखंडों वाली एक ही तल में बनी एक सरल बंद आकृति को *चतुर्भुज* (*quadrilateral*) कहते हैं। इसके कुछ उदाहरण हैं:

आकृति 12.1

परंतु निम्न आकृति चतुर्भुज नहीं है, यद्यपि यह एक तल में चार भुजाओं वाली एक बंद आकृति है। यह सरल नहीं है।

आकृति 12.2

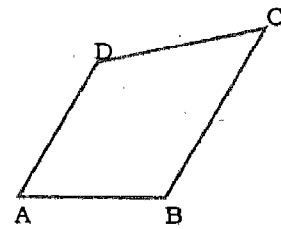
क्रियाकलाप:

1. कुछ माचिस की तीलियाँ लीजिए और उनके फास्फोरस युक्त सिरे को काट दीजिए [आकृति 12.3 (i)]। अब रबर नलिकाओं के कुछ छोटे टुकड़े लीजिए [आकृति 12.3(ii)]।

आकृति 12.3

2. रबर नलिका द्वारा दो तीलियों को इस प्रकार जोड़िए कि एक कोण बन जाए [आकृति 12.3 (iii)]।
3. दोनों मुक्त सिरों में से एक सिरे को एक तीसरी तीली के साथ इस प्रकार जोड़िए कि कोई भी दो तीलियाँ एक रेखा में न हों [आकृति 12.3 (iv)]।

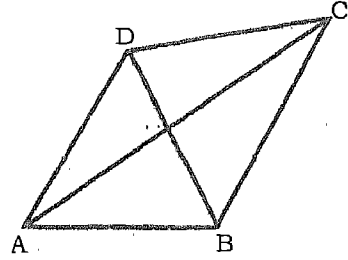
4. दोनों मुक्त सिरों को एक चौथी तीली के साथ इस प्रकार जोड़िए कि कोई भी दो तीलियाँ एक ही रेखा में न हों तथा तीलियाँ सिरों के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु पर प्रतिच्छेद न करें (आकृति 12.4)। ऐसा करने पर हमें चतुर्भुज के आकार की वस्तु प्राप्त होती है। त्रिभुज के विपरीत चतुर्भुज का आकार स्थिर नहीं है। यह आसानी से बदला जा सकता है। दो विपरीत कोनों पर दबाव लगा कर हम इस चतुर्भुज का आकार बदल सकते हैं। इस आकार को दृढ़ करने के लिए इसके विपरीत कोनों को दो और तीलियों की सहायता से जोड़ सकते हैं।

आकृति 12.4

गणित की भाषा में, हम एक चतुर्भुज को इस प्रकार समझेंगे:

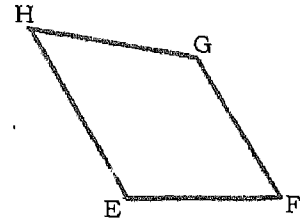
यदि किसी तल में हम चार बिंदु A, B, C एवं D इस प्रकार लें कि (i) इनमें से कोई भी तीन बिंदु एक रेखा में स्थित न हों तथा (ii) रेखाखंड AB, BC, CD एवं DA अंत बिंदुओं को छोड़कर किसी अन्य बिंदु पर प्रतिच्छेद न करें, तो इन चारों रेखाखंडों से बनने वाली आकृति को *चतुर्भुज* (*quadrilateral*) कहते हैं (आकृति 12.5)। बिंदु A, B, C एवं D चतुर्भुज के *शीर्ष* (*vertices*) कहलाते हैं।

संक्षिप्त रूप में, शीर्षों A, B, C एवं D वाले चतुर्भुज को हम चतुर्भुज ABCD कहेंगे। रेखाखंड AB, BC, CD एवं DA चतुर्भुज ABCD की *भुजाएँ* (*sides*) कहलाती हैं। रेखाखंडों द्वारा शीर्षों पर निर्मित कोण ∠DAB, ∠ABC, ∠BCD एवं ∠CDA चतुर्भुज के *कोण* (*angles*) कहलाते हैं। इन कोणों को हम संक्षिप्त रूप में क्रमशः ∠A, ∠B, ∠C एवं ∠D कहेंगे।

आकृति 12.5

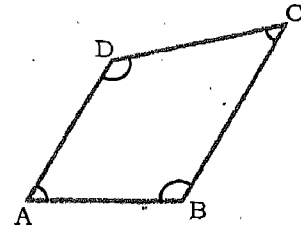
12.2.1 चतुर्भुज के विकर्ण

हम जानते हैं कि त्रिभुज का आकार दृढ़ होता है, परंतु चतुर्भुज का आकार आसानी से बदला जा सकता है। किंतु यदि शीर्ष A एवं C अथवा B एवं D को जोड़ दिया जाए, तो चतुर्भुज का आकार भी दृढ़ हो जाता है। *सम्मुख शीर्षों* A *एवं* C *तथा* B *एवं* D *को जोड़ने वाले रेखाखंड* AC *एवं* BD *चतुर्भुज* ABCD *के विकर्ण (diagonals) कहलाते* हैं (आकृति 12.6)।

आकृति 12.6

12.2.2 आसन्न भुजाएँ एवं सम्मुख भुजाएँ

यदि हम एक चतुर्भुज की दो भुजाएँ लें, तो इन भुजाओं में या तो एक उभयनिष्ठ शीर्ष होगा या कोई उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं होगा। उदाहरणार्थ, चतुर्भुज EFGH (आकृति 12.7) की भुजाओं EF एवं EH में एक उभयनिष्ठ शीर्ष E है, परंतु भुजाओं EF एवं GH में कोई उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं है। चतुर्भुज की ऐसी दो भुजाएँ जिनमें एक उभयनिष्ठ शीर्ष होता है, *आसन्न भुजाएँ (adjacent sides)* कहलाती हैं। जिन दो भुजाओं में उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं होता वे *सम्मुख भुजाएँ (opposite sides)* कहलाती हैं। चतुर्भुज EFGH में EF और GH तथा GF और HE सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं। इसी प्रकार, EH और GH, EF और FG, FG और GH तथा EF और HE आसन्न भुजाओं के चार युग्म हैं।

आकृति 12.7

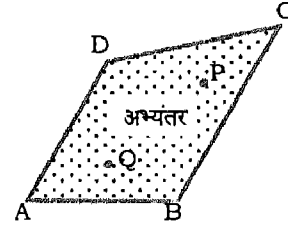
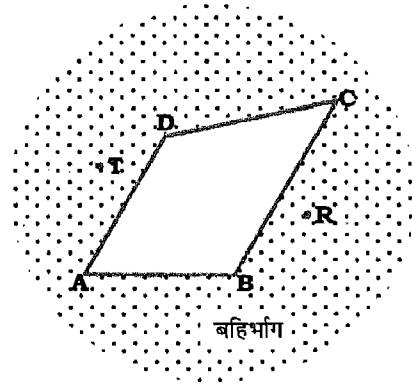
12.2.3 आसन्न कोण तथा सम्मुख कोण

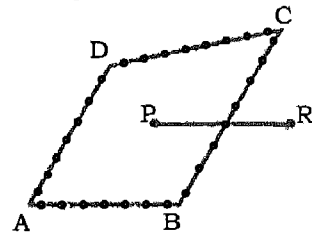
यदि हम चतुर्भुज के दो कोण लें, तब या तो दोनों कोणों में एक उभयनिष्ठ भुजा होगी या कोई उभयनिष्ठ भुजा नहीं होगी। उदाहरण के लिए, चतुर्भुज ABCD (आकृति 12.8) में, $\angle A$ तथा $\angle B$ में भुजा AB उभयनिष्ठ है।

आकृति 12.8

उभयनिष्ठ भुजा वाले कोण *आसन्न कोण* (*adjacent angles*) कहलाते हैं। इसी प्रकार, $\angle B$ एवं $\angle C$, $\angle C$ एवं $\angle D$ तथा $\angle D$ एवं $\angle A$ भी आसन्न कोणों के युग्म हैं। $\angle B$ एवं $\angle C$ में भुजा BC, $\angle C$ एवं $\angle D$ में भुजा CD तथा $\angle D$ एवं $\angle A$ में भुजा DA उभयनिष्ठ भुजा है। चतुर्भुज के दो कोण जो आसन्न कोण नहीं हैं, *सम्मुख कोण* (*opposite angles*) कहलाते हैं। इस प्रकार, $\angle A$ एवं $\angle C$ तथा $\angle B$ एवं $\angle D$ सम्मुख कोणों के दो युग्म हैं।

12.2.4 चतुर्भुज का अभ्यंतर एवं बहिर्भाग

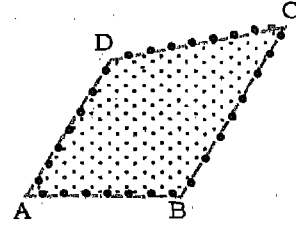
हम जानते हैं कि चतुर्भुज चार भुजाओं वाली एक समतल आकृति है। इस आकृति के द्वारा तल के बिंदु तीन भागों में निम्न प्रकार बँट जाते हैं:

(i) एक भाग वह जो चतुर्भुज ABCD से घिरे P एवं Q जैसे बिंदुओं से बना है। इस भाग को चतुर्भुज का *अभ्यंतर* (*interior*) कहते हैं [आकृति 12.9 (i)]। बिंदु P एवं Q, जो चतुर्भुज के अभ्यंतर में स्थित हैं, चतुर्भुज के *आंतरिक बिंदु* (*interior points*) कहलाते हैं।

(ii) दूसरा वह भाग जिसमें R एवं T जैसे वे सभी बिंदु हैं जो चतुर्भुज से घिरे नहीं हैं। इस भाग को चतुर्भुज का *बहिर्भाग* (*exterior*) कहते हैं [आकृति 12.9 (ii)]। इस प्रकार के बिंदुओं R एवं T को चतुर्भुज के *बाह्य बिंदु* (*exterior points*) कहते हैं।

(iii) तीसरा भाग *स्वयं चतुर्भुज* ABCD है [आकृति 12.9(iii)]।

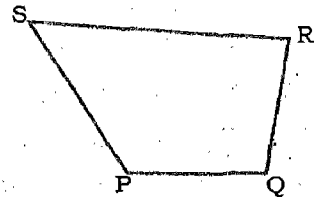
बिंदु P चतुर्भुज के अभ्यंतर में तथा R बहिर्भाग में स्थित है। रेखाखंड PR बनाने के लिए, हमें चतुर्भुज ABCD के किसी बिंदु को पार करना पड़ेगा। अर्थात् चतुर्भुज के अभ्यंतर से बहिर्भाग अथवा बहिर्भाग से अभ्यंतर में जाने के लिए, चतुर्भज के किसी न किसी बिंदु से होकर जाना पड़ेगा। इस प्रकार, हम कहते हैं कि चतुर्भुज ABCD अपने अभ्यंतर की *परिसीमा* (*boundary*) है।

आकृति 12.9 (i)

आकृति 12.9 (ii)

आकृति 12.9 (iii)

चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर को चतुर्भुज के साथ मिलाकर बने क्षेत्र को *चतुर्भुजीय क्षेत्र* (*quadrilateral region*) ABCD कहते हैं [आकृति 12.9 (iv)]।

आकृति 12.9 (iv)

प्रश्नावली 12.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिएः
   (i) चतुर्भुज में .... शीर्ष होते हैं।
   (ii) चतुर्भुज में .... भुजाएँ होती हैं।
   (iii) चतुर्भुज में .... कोण होते हैं।
   (iv) चतुर्भुज में .... विकर्ण होते हैं।
2. एक चतुर्भुज ABCD तथा उसका एक विकर्ण AC खींचिए। विकर्ण चतुर्भुज को किन आकृतियों में विभाजित करता है? इस प्रकार की कितनी आकृतियाँ बनती हैं?
3. चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में एक बिंदु O लीजिए। इस बिंदु को शीर्षों A, B, C एवं D से जोड़िए। चतुर्भुज किस प्रकार की आकृतियों में विभाजित होता है? इन आकृतियों का नामांकन कीजिए।
4. आकृति 12.10 में, PQRS एक चतुर्भुज है।
   (i) आसन्न भुजाओं के कितने युग्म हैं? उन्हें नामांकित कीजिए।
   (ii) सम्मुख भुजाओं के कितने युग्म हैं? उन्हें नामांकित कीजिए।
   (iii) आसन्न कोणों के कितने युग्म हैं? उन्हें नामांकित कीजिए।
   (iv) सम्मुख कोणों के कितने युग्म हैं? उन्हें नामांकित कीजिए।

आकृति 12.10

5. एक चतुर्भुज ABCD खींचिए। चतुर्भुजीय क्षेत्र ABCD को छायांकित कीजिए। इसके (i) शीर्षों, (ii) कोणों, (iii) विकर्णों, (iv) आसन्न भुजाओं, (v) आसन्न कोणों, (vi) सम्मुख भुजाओं एवं (vii) सम्मुख कोणों के नाम लिखिए।
6. चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में एक बिंदु M तथा बहिर्भाग में बिंदु N का चयन कीजिए तथा MN को जोड़िए। क्या रेखाखंड MN चतुर्भुज से कहीं मिलता है? यदि हाँ, तो कितने बिंदुओं पर?

12.3 चतुर्भुज के कोणों के योग का गुण

क्रियाकलाप 1:

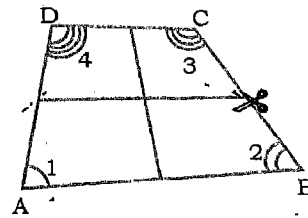
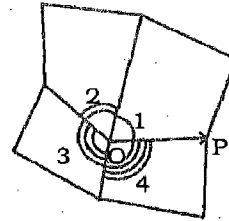
1. एक मोटा कागज लीजिए और उस पर एक चतुर्भुज ABCD खींचिए।
2. इसके कोणों पर चिह्न अंकित कर उन्हें 1, 2, 3 एवं 4 से नामांकित कीजिए। कैंची द्वारा चतुर्भुजीय क्षेत्र ABCD को काट लीजिए (आकृति 12.11)।
3. इस चतुर्भुजीय क्षेत्र को चार भागों में इस प्रकार काटिए कि प्रत्येक भाग चतुर्भुज का एक कोण 1, 2, 3 या 4 निर्धारित करे (आकृति 12.12)।
4. एक किरण OP खींचिए। अब काटे हुए कोणों को इस प्रकार रखिए कि प्रत्येक का शीर्ष O पर आए। पहले $\angle 1$ को इस प्रकार रखिए कि इसकी एक भुजा OP के अनुदिश रहे। अब दूसरे कोणों को इस प्रकार रखिए कि न तो वे एक दूसरे पर चढ़ें और न उनके बीच कोई स्थान खाली बचे (आकृति 12.13)।

आकृति 12.11

आकृति 12.12

आकृति 12.13

5. इस प्रकार हमें क्या प्राप्त होता है? हम देखते हैं कि चारों कोण मिलकर O पर एक *संपूर्ण कोण* (*complete angle*) बना रहे हैं। हम ज़ानते हैं कि संपूर्ण कोण का माप 360° होता है।

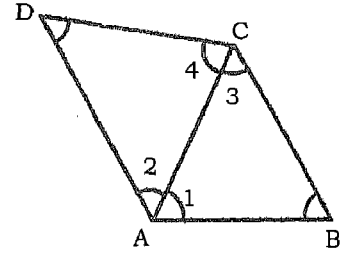
अतः, चतुर्भुज ABCD के चारों कोणों का योग 360° है।

क्रियाकलाप 2: चार चतुर्भुज खींचिए तथा प्रत्येक को ABCD से नामांकित कीजिए। इन्हें I, II, III एवं IV से क्रमांकित कीजिए। प्रत्येक के कोणों को माप कर प्रेक्षणों को सारणी के रूप में निम्न प्रकार भरिए:

चतुर्भुज का क्रमांक	$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$	$S=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$	$360^\circ-S$
I			
II			
III			
IV			

आप देखेंगे कि $360^\circ-S$ या तो शून्य है या नगण्य। यदि माप ठीक से नहीं लिया गया, तब ही $360^\circ-S$ का मान शून्येतर प्राप्त होगा। इस प्रकार, प्रत्येक सही स्थिति में,

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

क्रियाकलाप 3:

1. एक चतुर्भुज ABCD खींचिए तथा विकर्ण AC बनाइए। यह विकर्ण चतुर्भुज को दो त्रिभुजों ABC एवं ADC में विभाजित करता है।
2. कोणों BAC, DAC, BCA एवं DCA को क्रमशः 1, 2, 3 एवं 4 से नामांकित कीजिए (आकृति 12.14)।

आकृति 12.14

3. क्या आप $\angle 1 + \angle B + \angle 3$ तथा $\angle 2 + \angle 4 + \angle D$ प्राप्त कर सकते हैं?
   त्रिभुज के कोणों के योग के गुण के अनुसार,

$$\angle 1 + \angle B + \angle 3 = 180^\circ \quad (1)$$

$$\angle 2 + \angle 4 + \angle D = 180^\circ \quad (2)$$

(1) एवं (2) का योग लेने पर, हमें प्राप्त होता है कि

$$\angle 1 + \angle B + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 + \angle D = 180^0+180^0 = 360^0$$

या $\quad (\angle 1 + \angle 2) + \angle B + (\angle 3 + \angle 4) + \angle D = 360^0$

अतः, $\quad \angle DAB + \angle B + \angle BCD + \angle D = 360^0$

या $\quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ = 4$ समकोण

अर्थात् *चतुर्भुज के चारों कोणों का योग* 360° *या 4 समकोण होता है।*

उदाहरण 1: चतुर्भुज ABCD का $\angle D = 120°$ तथा $\angle A = \angle B = \angle C$ है। चतुर्भुज के शेष तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल: चतुर्भुज ABCD में,

$$\angle D = 120°.$$

मान लें कि $\angle A = \angle B = \angle C = x°$

तब चतुर्भुज के कोणों के योग-गुण से,

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

या $x° + x° + x° + 120° = 360°$

या $3x° = 360° - 120° = 240°$

या $x° = \dfrac{240°}{3} = 80°$

अत:, $\angle A = \angle B = \angle C = 80°$

उदाहरण 2: एक चतुर्भुज के तीन कोण 1: 2: 3 के अनुपात में हैं। यदि इनमें से सबसे छोटे तथा सबसे बड़े कोणों का योग 180° हो, तो चतुर्भुज के चारों कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि चतुर्भुज के तीन कोण क्रमशः $x°, 2x°$ व $3x°$ हैं (कोण 1: 2: 3 के अनुपात में हैं)।

दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार,

$$x° + 3x° = 180°$$

या $x° = 45°$

इस प्रकार, $2x° = 90°$ तथा $3x° = 135°$

अत:, तीन कोण $45°, 90°$ और $135°$ हैं।

अब चतुर्भुज के कोणों के योग-गुण से,

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

या $45° + 90° + 135° + \angle D = 360°$

अर्थात् $\angle D = 360° - 270° = 90°$

अत:, चतुर्भुज के चारों कोणों के माप $45°, 90°, 135°$ एवं $90°$ हैं।

प्रश्नावली 12.2

1. एक चतुर्भुज के तीन कोणों के माप $70°, 50°$ एवं $125°$ हैं। चौथे कोण का माप क्या होगा?
2. चतुर्भुज ABCD में, $\angle D = 150°$ तथा $\angle A = \angle B = \angle C$ है। चतुर्भुज के अन्य तीनों कोणों A, B एवं C को ज्ञात कीजिए।
3. चतुर्भुज के दो कोणों में से प्रत्येक का माप $65°$ है। यदि तीसरे कोण का माप $135°$ है, तो चौथे कोण का माप क्या है?
4. एक चतुर्भुज के सभी कोणों के माप बराबर हैं। प्रत्येक का माप क्या है?
5. क्या ऐसा चतुर्भुज संभव है, जिसके कोणों के माप $125°, 135°, 60°$ एवं $75°$ हों? कारण बताइए।
6. एक चतुर्भुज के चार कोण $3 : 5 : 7 : 9$ के अनुपात में हैं। ये कोण ज्ञात कीजिए।
7. एक चतुर्भुज के कोण $1 : 2 : 3 : 4$ के अनुपात में हैं। चारों कोणों के माप क्या हैं?

याद रखने योग्य बातें

1. यदि हम एक तल में चार बिंदु A, B, C एवं D इस प्रकार लें कि इनमें से कोई भी तीन संरेख नहीं हों तथा रेखाखंड AB, BC, CD और DA अंत बिंदुओं को छोड़कर परस्पर कहीं नहीं काटते हों, तो इन चारों रेखाखंडों से बनी आकृति को चतुर्भुज ABCD कहते हैं।
2. बिंदु A, F, C एवं D चतुर्भुज के शीर्ष कहलाते हैं।
3. रेखाखंड AB, BC, CD एवं DA चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ कहलाती हैं।
4. $\angle A, \angle B, \angle C$ एवं $\angle D$ चतुर्भुज के चार कोण कहलाते हैं।
5. सम्मुख शीर्षों को जोड़ने वाले रेखाखंड AC एवं BD चतुर्भुज ABCD के विकर्ण कहलाते हैं।
6. चतुर्भुज की वे दो भुजाएँ जिनमें एक शीर्ष उभयनिष्ठ होता है, आसन्न भुजाएँ कहलाती हैं।
7. चतुर्भुज में वे दो भुजाएँ जिनमें कोई उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं होता, सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं।
8. चतुर्भुज के वे दो कोण जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ होती है, आसन्न कोण कहलाते हैं।
9. चतुर्भुज के वे दो कोण जो आसन्न कोण नहीं हैं, सम्मुख कोण कहलाते हैं।
10. चतुर्भुज ABCD का अभ्यंतर चतुर्भुज की परिसीमा (अर्थात् स्वयं चतुर्भुज) के साथ मिलकर चतुर्भुजीय क्षेत्र ABCD बनाता है।
11. चतुर्भुज के कोणों का योग $360°$ होता है।

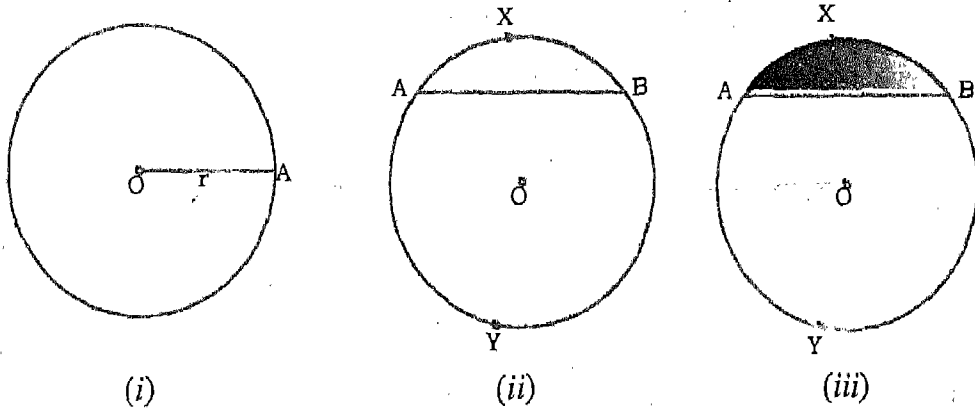
वृत्त

अध्याय 13

13.1 भूमिका

वृत्त के बारे में आप कक्षा VI में पढ़ चुके हैं। यहाँ हम वृत्त, केंद्र, त्रिज्या, अर्धवृत्त आदि अवधारणाओं को दोहराएँगे तथा वृत्तखंड के बारे में जानेंगे। हम वृत्त के कुछ गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

13.2 वृत्तखंड

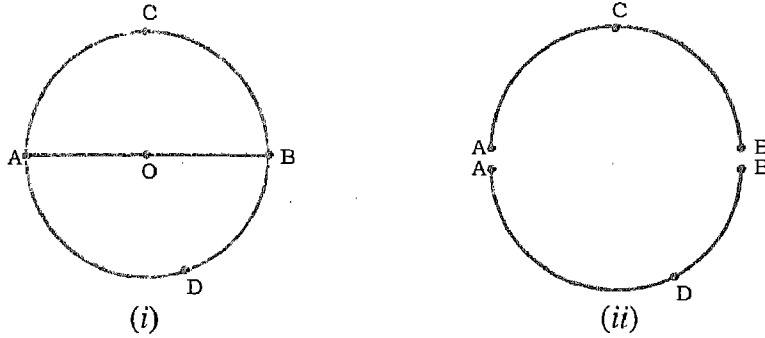
याद कीजिए कि वृत्त तल में बनी वह बंद आकृति है, जो तल में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिलकर बनी है, जो तल में स्थित एक निश्चित बिंदु O से अचर दूरी पर हैं [आकृति 13.1(i)]।

आकृति 13.1

निश्चित बिंदु O वृत्त का *केंद्र* (*centre*) तथा अचर दूरी OA (= r मान लीजिए) वृत्त की *त्रिज्या* (*radius*) कहलाती है।

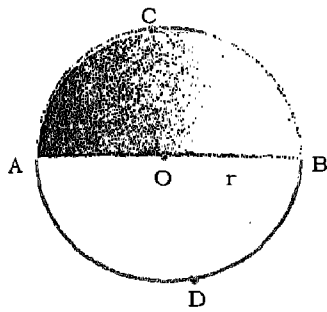
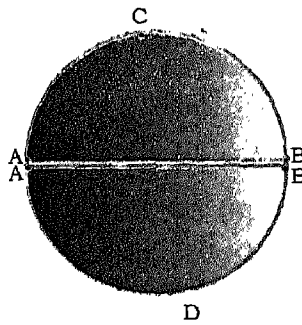
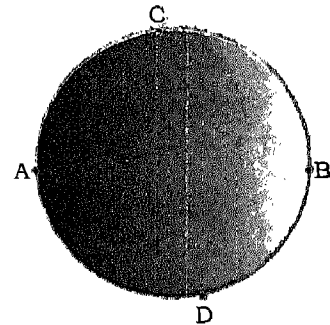
यदि A एवं B वृत्त पर स्थित दो बिंदु हैं [आकृति 13.1(ii)], तो रेखाखंड AB वृत्त की *जीवा* (*chord*) कहलाती है। वृत्त के केंद्र से होकर जाने वाली जीवा वृत्त का *व्यास* (*diameter*) कहलाती है। बिंदु A एवं B वृत्त को दो भागों में बाँटते हैं, जिन्हें *चाप* (*arcs*) कहते हैं। सामान्यतः दोनों चाप बराबर नहीं होते। छोटे भाग को *लघु चाप* (*minor arc*) तथा

बड़े भाग को *दीर्घ चाप* (*major arc*) कहते हैं। आकृति 13.1 (ii) में, AYB दीर्घ चाप तथा AXB लघु चाप है। वृत्त के चाप एवं चाप की जीवा से परिबद्ध क्षेत्र को *वृत्तखंड* (*segment of the circle*) कहते हैं। आकृति 13.1 (iii) में, छायांकित भाग AXB एक वृत्तखंड है। वृत्त का वह भाग जो छायांकित नहीं है वृत्त का दूसरा वृत्तखंड है। यहाँ AXB लघु वृत्तखंड तथा AYB दीर्घ वृत्तखंड है।

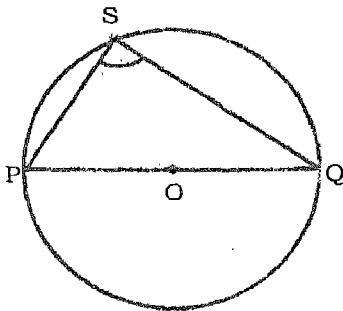
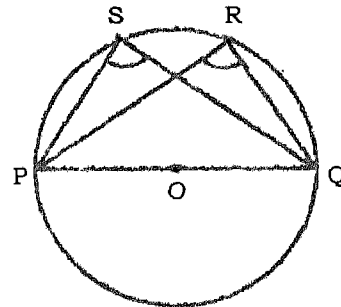
13.3 अर्धवृत्तीय क्षेत्र

हम जानते हैं कि विशेष स्थिति में, जब जीवा वृत्त का व्यास होती है, तो इसके अंत बिंदु वृत्त को दो बराबर भागों (चापों) में विभाजित करते हैं। इनमें से प्रत्येक भाग *अर्धवृत्त* (*semicircle*) कहलाता है। आकृति 13.2 (i) में, AB वृत्त का व्यास है तथा भागों ACB

आकृति 13.2

एवं ADB में से प्रत्येक एक अर्धवृत्त है [आकृति 13.2 (ii)]। यहाँ A एवं B दोनों अर्धवृत्तों में से प्रत्येक के अंत बिंदु हैं तथा व्यास AB अंत बिंदुओं को छोड़कर किसी भी अर्धवृत्त का भाग नहीं है।

अब तल के उस भाग पर विचार करें, जो व्यास AB, अर्धवृत्त ACB तथा वृत्त के अभ्यंतर के उस भाग से बना है, जो अर्धवृत्त ACB एवं व्यास AB से परिबद्ध है। इस क्षेत्र को छायांकित कीजिए, जैसा आकृति 13.3 (i) में दर्शाया गया है। इस क्षेत्र को एक *अर्धवृत्तीय क्षेत्र* (*semicircular region*) ACB कहते हैं। परंतु अछायांकित भाग ADB भी व्यास AB के साथ मिलकर एक अर्धवृत्ताकार क्षेत्र बनाता है [आकृति 13.3 (i)]। दोनों अर्धवृत्तीय क्षेत्र ACB एवं ADB मिलकर *वृत्तीय क्षेत्र* (*circular region*) ADBCA बनाते हैं [आकृति 13.3 (ii) और (iii)]।

आकृति 13.3

13.4 अर्धवृत्त एवं वृत्तखंड में कोण

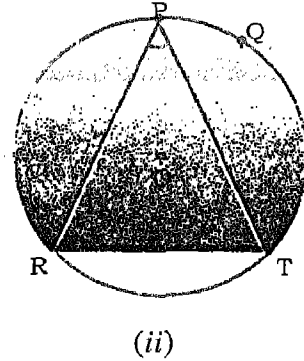
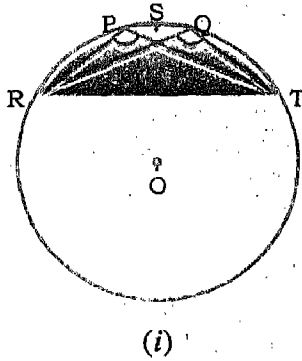
केंद्र O वाले एक वृत्त की रचना कीजिए। इस वृत्त का एक व्यास PQ बनाइए [आकृति 13.4 (i)]। किसी एक अर्धवृत्त पर बिंदु S अंकित कीजिए तथा PS एवं QS को जोड़िए। इस प्रकार प्राप्त कोण ∠PSQ *अर्धवृत्त में कोण* (*angle in a semicircle*) *कहलाता है।*

आकृति 13.4

इस प्रकार, *अर्धवृत्त में कोण वह कोण है, जो अर्धवृत्त के किसी बिंदु को व्यास के अंत बिंदुओं से मिलाने वाले रेखाखंडों द्वारा बनता है।*

∠PSQ अर्धवृत्त में बना एक कोण है। क्या आप इसी अर्धवृत्त में कोई अन्य कोण बना सकते हैं? हाँ, ∠PRQ इसी अर्धवृत्त में एक अन्य कोण है [आकृति 13.4 (ii)]।

13.4.1 वृत्तखंड में कोण

याद कीजिए कि वृत्तखंड वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग है, जो एक जीवा तथा उससे निर्मित वृत्त के दो चापों में से किसी एक चाप द्वारा परिबद्ध होता है।

आइए, केंद्र O वाले एक वृत्त के वृत्तखंड RST पर एक बिंदु P का चयन करें [आकृति 13.5 (i)]। P को R एवं T से जोड़कर ∠RPT बनाएँ। इस प्रकार बना ∠RPT *वृत्तखंड* RST में *कोण* कहलाता है। ∠RQT भी इसी वृत्तखंड में कोण है। क्या इसी वृत्तखंड में और भी कोण बनाए जा सकते हैं? यदि हाँ, तो कितने?

आकृति 13.5

इसी प्रकार, ∠RPT दीर्घ चाप RQT से निर्मित वृत्तखंड में एक कोण है [आकृति 13.5 (ii)]।

इस प्रकार, *वृत्तखंड में कोण वह कोण है जो वृत्तखंड की संगत चाप के किसी बिंदु को चाप के अंत बिंदुओं से मिलाने वाले दो रेखाखंडों से मिलकर बनता है।*

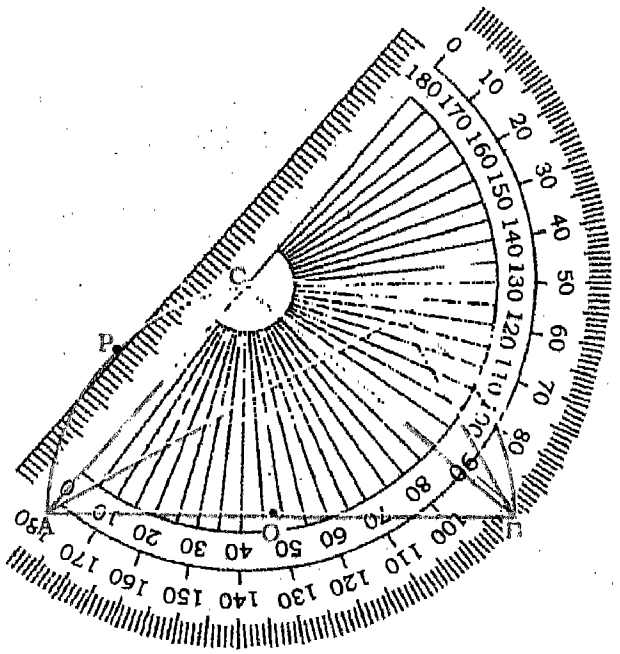
13.5 वृत्त से संबंधित कोणों के गुण

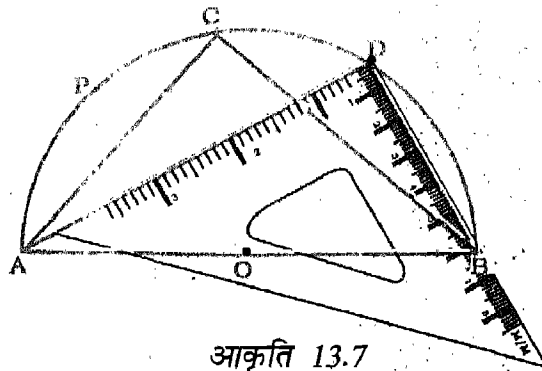
अब हम अर्धवृत्त तथा वृत्तखंड में बने कोणों के कुछ रोचक गुणों का अध्ययन करेंगे।

क्रियाकलाप:

1. किसी भी लंबाई का एक रेखाखंड AB खींचिए तथा इसके मध्य-बिंदु को O से दर्शाइए।
2. AB व्यास वाला एक अर्धवृत्त खींचिए (आकृति 13.6)।

3. अर्धवृत्त पर एक बिंदु C लेकर रेखाखंड AC तथा BC बनाइए। इस प्रकार बना ∠ACB अर्धवृत्त APB में एक कोण है।

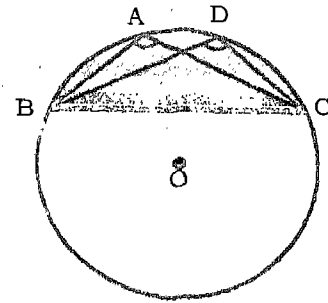
4. अब एक चाँदा लेकर इस प्रकार रखें कि इसकी 0 – 180 रेखा AC के अनुदिश रहे तथा उसका केंद्र C पर पड़े, जैसा कि आकृति 13.6 में दिखाया गया है। अब चाँदे पर भुजा CB के संगत चिह्न को देख कर, ∠ACB का माप लिखें। आप क्या देखते हैं? ∠ACB, 90° या एक समकोण के बराबर है।

आकृति 13.6

अब अर्धवृत्त पर एक अन्य बिंदु D लें [आकृति 13.6)]। DA तथा DB को जोड़ें। पूर्व की तरह, इस प्रकार बने ∠ADB का चाँदे की सहायता से माप लें। हम देखते हैं कि ∠ADB भी एक समकोण है। हम ∠ACB एवं ∠ADB को सेट स्क्वेयर की सहायता से भी माप सकते हैं (आकृति 13.7)। हमें पुनः प्राप्त होगा कि ∠ACB और ∠ADB समकोण हैं।

आकृति 13.7

अर्धवृत्त पर कुछ और बिंदु लेकर इस क्रिया को दोहराइए। प्रत्येक दशा में, हमें एक समकोण ही प्राप्त होगा। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

गुण I: *अर्धवृत्त में बना कोण एक समकोण होता है।*

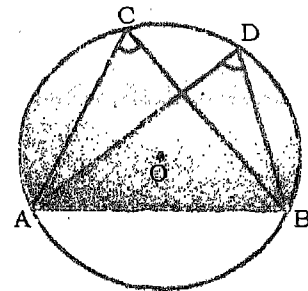
13.5.1 वृत्तखंड में कोण

पिछले अनुच्छेद में, हम वृत्तखंड में कोण बनाना सीख चुके हैं। केंद्र O वाले वृत्त के वृत्तखंड BADC में दो कोण ∠BAC एवं ∠BDC बनाइए (आकृति 13.8)। चाँदे का प्रयोग कर इन कोणों को मापिए तथा ∠BAC – ∠BDC प्राप्त कीजिए। इसी प्रकार, दो अन्य वृत्त बनाइए तथा प्रत्येक वृत्त के लिए उपर्युक्त प्रक्रिया दोहराइए। इन वृत्तों को क्रमांक 1, 2 एवं 3 देकर निम्न सारणी को पूरा कीजिए:

आकृति 13.8

वृत्त का क्रमांक	∠BAC	∠BDC	∠BAC–∠BDC
1.			
2.			
3.			

हम देखते हैं कि, प्रत्येक दशा में, ∠BAC–∠BDC शून्य अथवा नगण्य है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि ∠BAC = ∠BDC है।

अर्थात् *एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।*

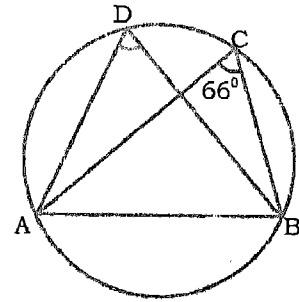
क्रियाकलाप: केंद्र O वाला एक वृत्त खींचिए (आकृति 13.9)। वृत्त पर दो बिंदु A एवं B लेकर उन्हें जोड़िए। जीवा AB वृत्तीय क्षेत्र को दो खंडों में विभाजित करती है। अब एक ही वृत्तखंड में ∠ACB तथा ∠ADB बनाइए जैसा कि आकृति 13.9 में दर्शाया गया है। एक *अक्स* कागज लेकर ∠ACB की *अक्स* प्रतिलिपि बनाइए। इस अक्स प्रतिलिपि को ∠ADB पर इस प्रकार अध्यारोपित कीजिए कि C बिंदु D पर तथा CA रेखाखंड DA के अनुदिश रहे। आप क्या देखते हैं? क्या भुजा CB, भुजा DB के अनुदिश है? यह सत्य है, अर्थात् ∠ACB, ∠ADB को पूरी तरह ढक लेता है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है:

आकृति 13.9

गुण II: *एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।*

उदाहरण 1: यदि संलग्न आकृति 13.10 के वृत्तखंड ADCB में बना $\angle ACB = 66°$ है, तो $\angle ADB$ का माप क्या है?

हल: गुण II के अनुसार, एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

अतः, $\angle ADB = \angle ACB = 66°$

इस प्रकार, $\angle ADB = 66°$ है।

आकृति 13.10

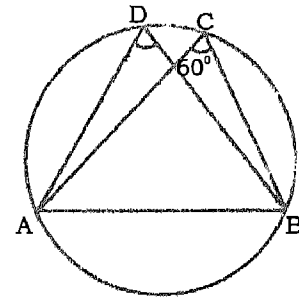
प्रश्नावली 13.1

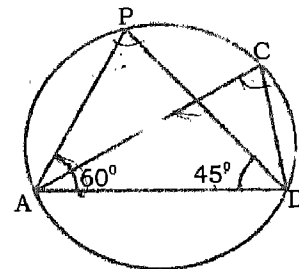
1. केंद्र O एवं त्रिज्या 4 सेमी वाला एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त के एक वृत्तखंड को बनाने के लिए आवश्यक चरणों को स्पष्ट कीजिए।

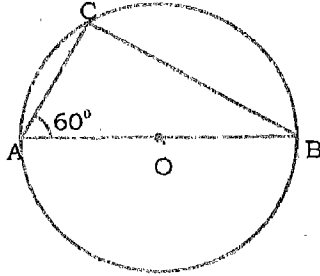
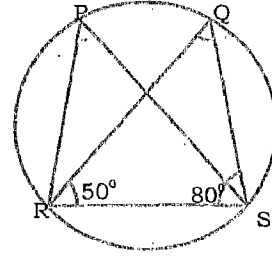
2. किसी त्रिज्या वाले तथा केंद्र O वाले एक वृत्त की रचना कीजिए। एक व्यास AB खींचिए तथा एक अर्धवृत्ताकार क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

3. प्रश्न 2 के अर्धवृत्ताकार क्षेत्र में चार कोण दर्शाइए।

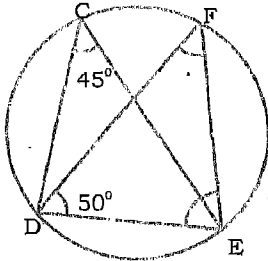
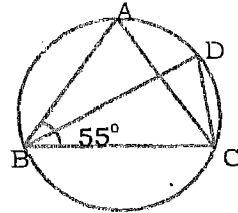
आकृति 13.11

4. यदि आकृति 13.11 में, $\angle ACB = 60°$ है, तो $\angle ADB$ क्या होगा? कारण बताइए।

5. किसी भी त्रिज्या वाले एक वृत्त में एक व्यास AB खींचिए। किसी भी एक अर्धवृत्त में तीन बिंदु C, D एवं E लेकर $\angle ACB$, $\angle ADB$ और $\angle AEB$ बनाइए। एक चाँदे द्वारा इन कोणों को मापिए। आप क्या देखते हैं?

6. आकृति 13.12 में, वृत्तखंड APCD में बने $\angle APD$ और $\angle ACD$ के माप ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.12

7. आकृति 13.13 के कोणों ACB एवं ABC के माप ज्ञात कीजिए, जबकि O वृत्त का केंद्र है।

आकृति 13.13

आकृति 13.14

8. आकृति 13.14 में, $\angle RQS$ एवं $\angle RPS$ के माप ज्ञात कीजिए।

9. आकृति 13.15 में बने कोणों DFE एवं FED के माप ज्ञात कीजिए।

आकृति 13.15

आकृति 13.16

10. आकृति 13.16 में, यदि $AB = AC$ तथा $\angle ABC = 55°$ है, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें

1. एक वृत्त के चाप तथा चाप की संगत जीवा से परिबद्ध क्षेत्र वृत्तखंड कहलाता है।
2. तल का वह भाग जिसमें व्यास, अर्धवृत्त तथा व्यास एवं अर्धवृत्त से घिरा वृत्त का अभ्यंतर सम्मिलित होता है, अर्धवृत्तीय क्षेत्र कहलाता है।
3. अर्धवृत्त में बना कोण एक समकोण होता है।
4. एक ही वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

अतीत के झरोखे से

ज्यामिति, अर्थात् '*जिओमैटरी*', यूनानी भाषा के दो शब्दों *geo* और *metron* से मिलकर बना है। '*geo*' का अर्थ है 'भूमि' और '*metron*' से तात्पर्य 'मापने' से है। इस प्रकार, ज्यामिति का प्रारंभ उस समय हुआ जब पहली बार लोगों को भूमि मापने की आवश्यकता हुई।

संभवत: प्राचीन मिस्र-निवासी ज्यामिति का अध्ययन करने वाले पहले लोग थे। प्रति वर्ष आने वाली बाढ़ के कारण नील नदी के लंबे तट के भू-चिह्न मिट जाते थे। अत: उन्हें फिर से बनाने के लिए उनको भूमि मापने की आवश्यकता पड़ती थी। परंतु उन्हें केवल आयतों और त्रिभुजों जैसी सरलरेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल ही निकालने होते थे। उन्होंने अपने अद्भुत पिरामिड बनाने के लिए भी ज्यामिति का विकास किया। वास्तव में, उनके माप इतने परिशुद्ध थे कि उनके विशाल पिरामिड के वर्गाकार आधार की भुजाओं में सापेक्ष त्रुटि $\frac{1}{14000}$ से भी कम है। (अर्थात् यदि एक भुजा की लंबाई को एक मात्रक मान लें, तो अन्य भुजाओं की लंबाई और एक मात्रक में अंतर $\frac{1}{14000}$ से भी कम है।) साथ ही, कोने के समकोणों की सापेक्ष त्रुटि $\frac{1}{27000}$ से भी कम है।

बेबीलोनिया-वासी भी ज्यामिति का प्रयोग केवल सरलरेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए करते थे। इन आकृतियों के क्षेत्रफल निकालने के लिए उन्होंने कई सूत्र भी बनाए। ये सूत्र बेबीलोनिया के एक प्राचीन गणित पाठ्य *(text) रींड पेपिरस* (*Rhind Papyrus*, 1650 ईसा पूर्व) में उपलब्ध हैं। कोणों को अंशों (*degrees*) में मापने का श्रेय भी बेबीलोनिया-वासियों को ही जाता है।

मिस्र-वासियों से ज्यामिति का ज्ञान यूनानियों को मिला। यूनानियों ने ज्यामिति का क्रमबद्ध विवेचन किया और इसके अध्ययन का विस्तार क्षेत्रफल आदि निकालने (विस्तार- कलन या क्षेत्रमिति) से आगे बढ़ाकर बिंदुओं, रेखाओं तथा तलों से बनी आकृतियों तक किया। इस संबंध में, *मिलैटस* (*Miletus*) नगर में रहने वाले व्यापारी *थेल्स* (*Thales*, 640-546 ईसा पूर्व) का नाम लिया जा सकता है। उन्होंने छोटी आयु में ही अपार धन एकत्र कर लिया था और अपनी शेष आयु देशाटन और अध्ययन-अध्यापन में बिताई। मिस्र में भ्रमण करते हुए, उनकी रुचि ज्यामिति में हुई। यूनान वापिस लौटने पर उन्होंने अपने मित्रों को

ज्यामिति सिखाना आरंभ कर दिया। ऐसा समझा जाता है कि ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग थेल्स द्वारा समुद्र के जहाजों के बीच दूरी ज्ञात करने के लिए किया गया।

थेल्स के शिष्यों में *पाइथागोरस* (*Pythagoras*, 580-500 ईसा पूर्व) सबसे अधिक विख्यात हुए। ऐसा समझा जाता है कि उनके नाम से प्रसिद्ध पाइथागोरस प्रमेय को सबसे पहले उन्होंने सिद्ध किया। यूनानी गणितज्ञों में *यूक्लिड* (*Euclid*) सबसे अधिक विख्यात हुए। तब तक के गणित के ज्ञान को व्यापक रूप से, और ज्यामिति के ज्ञान को विशेष रूप से, क्रमबद्ध रूप से संग्रहीत करने का श्रेय यूक्लिड को जाता है। उनका कार्य तेरह खंडों वाली *ऐलीमैंटस* (*Elements*) नाम से प्रसिद्ध पुस्तक में दिया गया है। अत्यंत स्पष्टता तथा विस्तार से उन्होंने रेखाओं, आयतों, वर्गों, समांतर चतुर्भुजों, वृत्तों, स्पर्श रेखाओं और जीवाओं का विवेचन किया है। प्रतिज्ञापन, कथन, रचना और उपपत्ति से परिणाम तक, निरूपण की जो प्रथा यूक्लिड ने चलाई थी वह लगभग वैसी ही आज तक चली आ रही है।

यद्यपि ज्यामिति को क्रमबद्ध रूप से एक विज्ञान की भाँति विकसित करने का श्रेय यूनानियों को जाता है, तब भी प्राचीन भारतीयों में ज्यामिति के अध्ययन-अध्यापन की प्रथा थी। सामान्य रूप से ऐसा समझा जाता है कि भारत में ज्यामिति का अध्ययन यज्ञ जैसे धार्मिक अनुष्ठानों के लिए विभिन्न प्रकार की वेदियाँ बनाने के संबंध में आरंभ हुआ। वेदियाँ अनेक सम आकारों में बनाई जाती थीं। इनके निर्माण के लिए ज्यामितीय आकृतियों के विषय में पर्याप्त ज्ञान होना आवश्यक था। शुल्बसूत्रों में, जिनका रचना-काल लगभग 800-500 वर्ष ईसा पूर्व माना जाता है, इन वेदियों के निर्माण के लिए अनेक सूत्र मिलते हैं। मोहनजोदड़ो और हड़प्पा (अब पाकिस्तान में) तथा लोथल (भारत के गुजरात राज्य में) में की गई खुदाई से पता चलता है कि प्राचीन भारत में ज्यामिति का उपयोग न केवल वेदियाँ बनाने में होता था, अपितु इसका उपयोग कॉलोनियों के विन्यास तथा मकानों, सड़कों एवं अन्य भवनों के निर्माण में भी होता था। ज्यामिति के अध्ययन में उल्लेखनीय योगदान देने वाले प्राचीन भारत के कुछ गणितज्ञों के नाम हैं: *बौधायन* (800 ईसा पूर्व), *आर्यभट* (जन्म 476 ई.), ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई.) तथा *भास्कर* (जन्म 1114 ई.)।

आयताकार पथों के क्षेत्रफल

अध्याय 14

14.1 भूमिका

कक्षा VI में, आपने परिमाप और क्षेत्रफल की धारणाओं का अध्ययन किया था। विशेष रूप से, आपने आयतों और वर्गों के परिमापों और क्षेत्रफलों का अध्ययन किया था। निम्नलिखित सूत्र आपको याद ही होंगे:

आयत का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

और वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

यदि हम अपने वातावरण में चारों ओर देखें, तो हमें बहुत-सी आयताकार और वर्गाकार वस्तुएँ दिखाई देंगी, जैसे कि आयताकार पार्क या बगीचे, कमरे का फर्श, चित्र, पोस्टर आदि। आपने ध्यान दिया होगा कि बहुधा पार्कों में अंदर या बाहर या बीच में (चौपड़ की तरह) कुछ स्थान पथों के रूप में छोड़ दिया जाता है जिससे कि लोग सुबह-शाम वहाँ घूम-फिर सकें। कई बार, किसी चित्र या पेंटिंग (पोस्टर या फोटो) को मढ़ते समय चित्र के चारों ओर कुछ स्थान (या मार्जन या पट्टी) छोड़ दिया जाता है। इसी प्रकार, कभी-कभी घर में हम किसी कमरे के चारों ओर बरामदा बनाना चाहते हैं। ऊपर जैसे कार्यों की योजना ठीक से बनाने के लिए, हम सामान्यतः आयताकार और वर्गाकार पथों से संबंधित इन कार्यों में होने वाले व्यय का पूर्वानुमान करना चाहेंगे। ऐसा करने के लिए हम इस अध्याय में, आयताकार पथों के क्षेत्रफल निकालना सीखेंगे। इसके बाद, इस ज्ञान का प्रयोग हम दैनिक जीवन की कुछ समस्याएँ हल करने में करेंगे।

14.2 आयताकार पथ

आयताकर पथ (rectangular paths) सामान्यतः किसी आयत के चारों ओर (भीतर या बाहर) या फिर मध्य पथों के रूप में पाए जाते हैं। हम इनके क्षेत्रफल निकालने की विधि कुछ उदाहरणों द्वारा समझाएँगे।

उदाहरण 1: 40 मी लंबे और 25 मी चौड़े एक आयताकार लॉन के चारों ओर बाहर 2 मी चौड़ा पथ बनाना है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: आइए, लॉन को आयत ABCD से निरूपित करें और इसके चारों ओर के पथ को आकृति 14.1 में दिखाए अनुसार छायांकित क्षेत्र से।

स्पष्टत:, इस दशा में,

EF = (40 + 2 + 2) मी = 44 मी

और FG = (25 + 2 + 2) मी = 29 मी

H G D 40 मी C 25 मी 29 मी A B E 44 मी F

आकृति 14.1

अब, पथ का क्षेत्रफल = आयत EFGH का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल

= (44 × 29 – 40 × 25) मी²

= (1276 – 1000) मी²

= 276 मी²

इस प्रकार, पथ का क्षेत्रफल 276 मी² है।

उदाहरण 2: 65 मी भुजा वाले एक वर्गाकार मैदान की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की ओर एक 2.5 मी चौड़ा पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। मैदान के शेष भाग में 5 रु प्रति वर्ग मी की दर से खाद डालने में क्या व्यय आएगा?

हल: वर्गाकार मैदान को वर्ग ABCD से निरूपित कीजिए (आकृति 14.2) और भीतर चारों ओर के पथ को छायांकित क्षेत्र से।

अब, पथ का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल – वर्ग EFGH का क्षेत्रफल

= (65 × 65 – 60 × 60)मी²

= (4225 – 3600)मी²

= 625 मी²

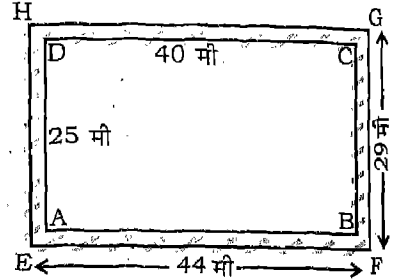
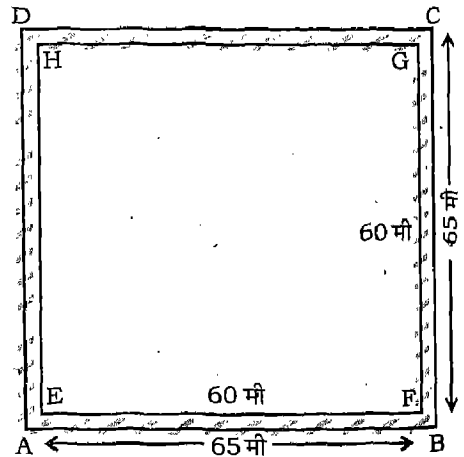
D C H G 60 मी 65 मी E 60 मी F A 65 मी B

आकृति 14.2

जिस क्षेत्र में खाद डालनी है, उसका क्षेत्रफल

= 60 × 60 मी²

= 3600 मी²

∴ 5 रु प्रति वर्ग मी की दर से खाद डालने का व्यय = 3600 × 5 रु = 18000 रु

उदाहरण 3: 72 मी लंबे और 48 मी चौड़े एक आयताकार पार्क के केंद्र से होकर जाते, एक दूसरे पर लंब चौपड़ के आकार में 2 मी चौड़े दो पथ ऐसे बने हुए हैं कि प्रत्येक पार्क की एक भुजा के समांतर है। पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति 14.3 में, ABCD पार्क को और आयत *PQRS* तथा *EFGH* पथों को निरूपित करते हैं।

पथों का क्षेत्रफल = PQRS का क्षेत्रफल + EFGH का क्षेत्रफल – KLMN का क्षेत्रफल

$= (48 \times 2 + 72 \times 2 - 2 \times 2)$ मी^{2}

$= (96 + 144 - 4)$ मी^{2}

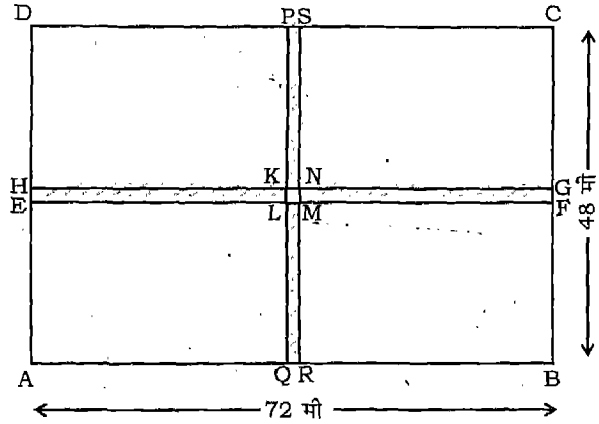
$= 236$ मी^{2}

आगे, पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल

= आयत ABCD का क्षेत्रफल – पथों का क्षेत्रफल

$= (72 \times 48 - 236)$ मी^{2}

$= (3456 - 236)$ मी^{2}

$= 3220$ मी^{2}

आकृति 14.3

प्रश्नावली 14.1

1. एक बगीचा 90 मी लंबा और 75 मी चौड़ा है। उसके बाहर चारों ओर एक 5 मी चौड़ा पथ बनाना है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. 100 मी भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क के भीतर उसकी परिसीमा से लगा 5 मी चौड़ा पथ बना हुआ है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. विमाओं 125 मी × 65 मी वाले एक आयताकार पार्क के चारों ओर बाहर एक 3 मी चौड़ा पथ बना हुआ है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   [**टिप्पणी:** कई बार हम कथन 125 मी × 65 मी का प्रयोग इस अर्थ में करते हैं कि लंबाई = 125 मी और चौड़ाई = 65 मी।]

4. 8 सेमी लंबे और 5 सेमी चौड़े एक गत्ते पर एक पेंटिंग इस प्रकार बनाई गई है कि उसके प्रत्येक किनारे पर 1.5 सेमी का मार्जन (*margin*) है। मार्जन का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. फूलों की एक वर्गाकार क्यारी की भुजा 1 मी 80 सेमी है। उसके चारों ओर 20 सेमी चौड़ी पट्टी खोदकर उसे बढ़ाया गया है। ज्ञात कीजिए:
   (i) बढ़ी हुई फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल।
   (ii) फूलों की क्यारी के क्षेत्रफल में वृद्धि।

6. 5.5 मी लंबे और 4 मी चौड़े कमरे के चारों ओर बाहर 1.25 मी चौड़ा एक बरामदा बनाया गया है। ज्ञात कीजिए:
   (i) बरामदे का क्षेत्रफल।
   (ii) बरामदे के फर्श पर 25 रु प्रति वर्ग मी की दर से सीमेंट कराने का व्यय।

7. 30 मी भुजा वाले एक वर्गाकार बगीचे की परिसीमा से लगा भीतर की ओर 1 मी चौड़ा एक पथ बना है। ज्ञात कीजिए:
   (i) पथ का क्षेत्रफल।
   (ii) बगीचे के शेष भाग में 2.40 रु प्रति वर्ग मी की दर से घास लगाने का व्यय।

8. माप 20 सेमी × 16 सेमी वाला एक पोस्टर एक गत्ते पर इस प्रकार चिपकाया गया है कि पोस्टर के प्रत्येक किनारे के बाहर 3.5 सेमी चौड़ा मार्जन है। ज्ञात कीजिए:
   (i) मार्जन का कुल क्षेत्रफल।
   (ii) 1.20 रु प्रति वर्ग सेमी की दर से प्रयुक्त गत्ते का व्यय।

9. 700 मी लंबे और 300 मी चौड़े एक आयताकार पार्क के केंद्र से होकर जाते, एक-दूसरे पर लंब, चौपड़ के आकार में 5 मी चौड़े दो पथ ऐसे बने हुए हैं कि इनमें से प्रत्येक, पार्क की किसी भुजा के समांतर है। पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 105 रु प्रति मी^{2} की दर से पथों को बनाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

10. एक आयताकार बगीचा 65 मी लंबा और 50 मी चौड़ा है। भुजाओं के समांतर 2 मी चौड़े दो अनुप्रस्थ (*cross*) पथ बनाए जाने हैं। यदि ये पथ बगीचे के केंद्र में से होकर जाने हैं, तो 69 रु प्रति वर्ग मी की दर से पथ बनाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

11. एक आयताकार मैदान की विमाएँ 25 मी × 16.4 मी हैं। भुजाओं के समांतर दो पथ मैदान के केंद्र से होकर जाते हैं। लंबे पथ की चौड़ाई 1.7 मी है और छोटे पथ की 2 मी है। ज्ञात कीजिए:
    (i) पथों का क्षेत्रफल।
    (ii) मैदान के शेष भाग का क्षेत्रफल।
12. विमाओं 90 मी × 60 मी वाले एक आयताकार मैदान में दो पथ बनाए गए हैं, जो भुजाओं के समांतर हैं, एक-दूसरे को लंबवत् काटते हैं और मैदान के केंद्र से होकर निकलते हैं। यदि प्रत्येक पथ की चौड़ाई 3 मी हो, तो ज्ञात कीजिए:
    (i) पथों द्वारा आच्छादित क्षेत्र।
    (ii) 110 रु प्रति वर्ग मी की दर से पथ बनाने का व्यय।
13. एक आयताकार मैदान 94 मी लंबा और 32 मी चौड़ा है। दो-दो मी चौड़े तीन पथ इसमें ऐसे बने हैं कि दो तो उसकी चौड़ाई के और एक उसकी लंबाई के समांतर है। इस मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो:
    (i) तीनों पथों से आच्छादित है।
    (ii) पथों से आच्छादित नहीं है।
14. एक आयताकार पार्क की विमाएँ 90 मी × 80 मी हैं। इसमें चार पथ हैं, जिनमें से 1.5 मी चौड़े दो पथ तो चौड़ाई के समांतर हैं और 2 मी चौड़े दो पथ लंबाई के समांतर हैं। ज्ञात कीजिए:
    (i) पथों का क्षेत्रफल।
    (ii) पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल।

याद रखने योग्य बातें

1. आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई
2. वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$
3. आयताकार मैदान के भीतर (या बाहर) आयताकार पथ का क्षेत्रफल = बाहर वाले आयत का क्षेत्रफल − भीतर वाले आयत का क्षेत्रफल
4. अनुप्रस्थ (या चौपड़) पथों का क्षेत्रफल = पथों को बनाने वाले सभी आयतों का क्षेत्रफल − उभयनिष्ठ आयत (या वर्ग) का क्षेत्रफल

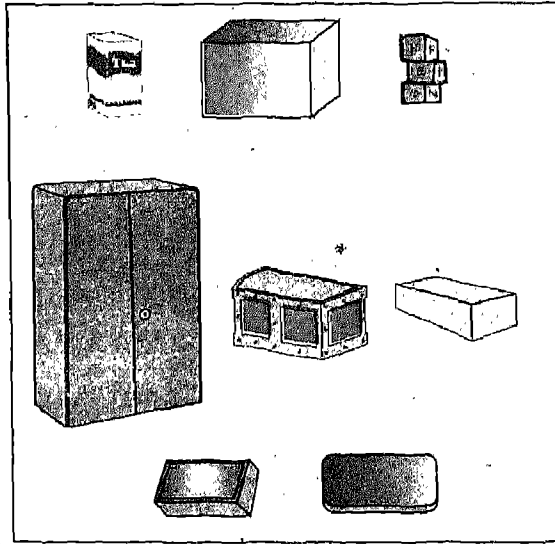
पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन

अध्याय 15

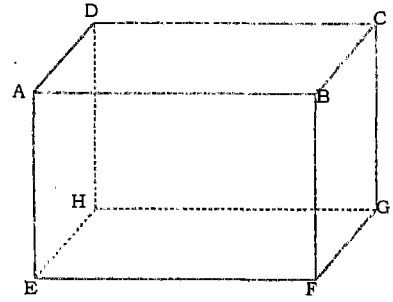
15.1 भूमिका

कक्षा VI में, आपने *परिमाप* तथा *क्षेत्रफल* की धारणाओं के विषय में पढ़ा और सीखा था। आपने आयत और वर्ग जैसी सरल समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल निकालना भी सीखा था। पिछले अध्याय में, आपने समकोणिक पथों के क्षेत्रफल के विषय में कुछ सीखा है। अब हम कुछ ऐसी आकृतियों का अध्ययन करेंगे, जो समतलीय नहीं होतीं। इस ज्ञान का अनुप्रयोग दैनिक जीवन की कुछ सरल समस्याएँ हल करने में किया जाएगा। *घनाभ* (*cuboids*) और *घन* (*cubes*) ऐसी आकृतियों (जो समतलीय नहीं हैं) में सरलतम आकृतियाँ हैं। ये आकृतियाँ किसी भी तल में पूर्ण रूप से नहीं समाती। ऐसी आकृतियों को *ठोस* (*solid*) (*त्रिविमीय*) (*three dimensional*) आकृतियाँ कहते हैं। यहाँ हम घनाभ के पृष्ठ का क्षेत्रफल और घनाभ का आयतन निकालना सीखेंगे।

15.2 घनाभ तथा घन

दैनिक जीवन में काम आने वाली निम्नलिखित वस्तुओं को देखिए:

आकृति 15.1

आकृति 15.2

ऊपर दिखाई गई (लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाली) सभी वस्तुएँ *घनाभ* (जिसे *समकोणिक समांतर-षट्फलक* (*rectangular parallelopiped*) भी कहते हैं) कहलाने वाली एक ज्यामितीय आकृति के उदाहरण हैं। आकृति 15.2 एक घनाभ को निरूपित करती है। यों तो इसे कागज के एक पन्ने पर खींचा गया है, परंतु यह समतलीय आकृति नहीं है। वास्तव में, यह एक घनाभ का *रेखाचित्र* (*sketch*) है।

जैसा कि आकृति से दिखाई देता है, एक घनाभ छः आयताकार क्षेत्रों से बना होता है। प्रत्येक यह क्षेत्र घनाभ का एक *फलक* (*face*) कहलाता है। इस प्रकार, किसी भी *घनाभ के छः फलक होते हैं।* ऊपर और नीचे वाले फलकों से *सम्मुख* (*opposite*) *फलकों* का एक युग्म बनता है; आगे और पीछे वाले फलकों से सम्मुख फलकों का एक और युग्म बनता है। दाएँ-बाएँ (इधर-उधर) वाले शेष दो पार्श्वीय (या पार्श्व) फलकों से सम्मुख फलकों का तीसरा युग्म बनता है। इस बात पर ध्यान दीजिए कि सम्मुख फलकों के तीनों युग्मों में प्रत्येक फलक दूसरे फलक के सर्वांगसम है। इस प्रकार, किसी भी घनाभ में *सर्वांगसम सम्मुख फलकों के तीन युग्म होते हैं।*

आकृति 15.2 में, ABCD ऊपर वाला और EFGH नीचे वाला फलक (या *आधार*) है। ABFE सामने वाला और CDHG पीछे वाला फलक है, जबकि BFGC और ADHE दाएँ-बाएँ (इधर-उधर) वाले फलक हैं। ऊपर-नीचे के फलकों को छोड़कर शेष फलकों को *पार्श्वीय* (*lateral*) *फलक* भी कहते हैं।

किन्हीं भी ऐसे दो फलकों को, जो सम्मुख फलक नहीं हैं, *आसन्न* (*adjacent*) *फलक* कहते हैं। ये एक रेखाखंड में मिलते हैं, जिसे *कोर* (*edge*) कहा जाता है। आकृति 15.2 के घनाभ की कोरें AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG और DH हैं। इस प्रकार, *प्रत्येक घनाभ में बारह कोरें होती हैं।* ध्यान दीजिए कि प्रत्येक दिए गए फलक के लिए, सम्मुख फलक को छोड़कर शेष चार फलक दिए गए फलक के आसन्न फलक होते हैं। इस प्रकार, प्रत्येक *फलक के चार आसन्न फलक होते हैं।*

एक घनाभ में आठ कोने होते हैं। प्रत्येक यह कोना घनाभ का एक *शीर्ष* (*vertex*) कहलाता है। आकृति 15.2 में, A, B, C, D, E, F, G और H घनाभ के शीर्ष हैं। प्रत्येक शीर्ष पर तीन कोरें मिलती हैं। ध्यान दीजिए कि इन तीनों में से प्रत्येक कोर शेष दो कोरों पर *लंब* होती है।

क्योंकि घनाभ के सम्मुख फलक सर्वांगसम होते हैं, अतः आकृति से यह समझना सरल है कि

$$AB = DC = HG = EF$$

$$BC = AD = FG = EH$$

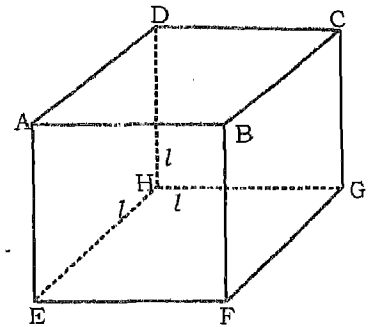
और $$AE = BF = CG = DH$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि घनाभ की बारह कोरों की केवल *तीन* भिन्न लंबाइयाँ हो सकती हैं। प्रायः इनमें से दीर्घतम को घनाभ की *लंबाई* कहा जाता है तथा शेष दो में से एक को चौड़ाई और दूसरी को घनाभ की *ऊँचाई* (या *गहराई* या *मोटाई*) कहते हैं। सामान्यतः ऊर्ध्वाधर कोरों की लंबाई को घनाभ की ऊँचाई मान लिया जाता है।

घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई को प्रायः क्रमशः वर्ण-संकेतों l, b और h से व्यक्त किया जाता है। घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई को घनाभ की *तीन विमाएँ* (*dimensions*) भी कहा जाता है।

आकृति 15.3

आकृति 15.2 से स्पष्ट है कि आधार EFGH वाले घनाभ की ऊँचाई AE (या BF या CG या DH) है।

जिस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हों, उसे *घन* (*cube*) कहते हैं (आकृति 15.3)।

टिप्पणी: घनाभ के ऊपर किए गए वर्णन से हमें दो संबद्ध आकृतियों की याद आती है: *खोखला घनाभ* और *ठोस* घनाभ। वास्तव में, *घनाभ से हमारा तात्पर्य खोखले घनाभ से होता है।* यह आकाश (*space*) में बने सम्मुख फलकों (आयताकार क्षेत्रों) के तीन युग्मों से बनी ऐसी आकृति है जिसमें जब भी दो फलक (सम्मुख फलकों के अतिरिक्त) मिलते हैं, तो वे एक रेखाखंड में मिलते हैं।

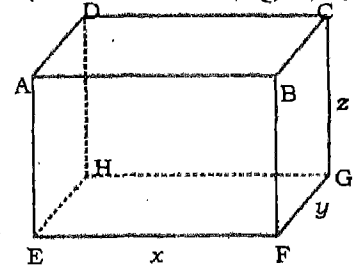
घनाभ से घिरा आकाश का भाग उसका अभ्यंतर या अंत: *क्षेत्र* (*interior*) कहलाता है। घनाभ और उसके अंत: क्षेत्र को मिलाकर *घनाभीय क्षेत्र* (*cuboidal region*) कहते हैं और यही सामान्यत: *ठोस घनाभ* कहलाता है। पहले की कक्षाओं में सीखे गए आयत और आयताकार क्षेत्र में जो अंतर होता है उसे याद कीजिए। क्या वैसा ही अंतर आपको घनाभ (खोखले घनाभ) और घनाभीय क्षेत्र (ठोस घनाभ) में भी दिखाई देता है?

सामान्यत:, 'घनाभ' शब्द खोखले और ठोस — दोनों प्रकार के घनाभों के लिए प्रचलन में है। व्यवहार में, इससे कोई असुविधा नहीं होती, क्योंकि संदर्भ से अर्थ स्पष्ट हो जाता है। इसी प्रकार, 'घन' शब्द का प्रयोग भी खोखले घन और ठोस घन (घनीय क्षेत्र), दोनों के लिए किया जाता है।

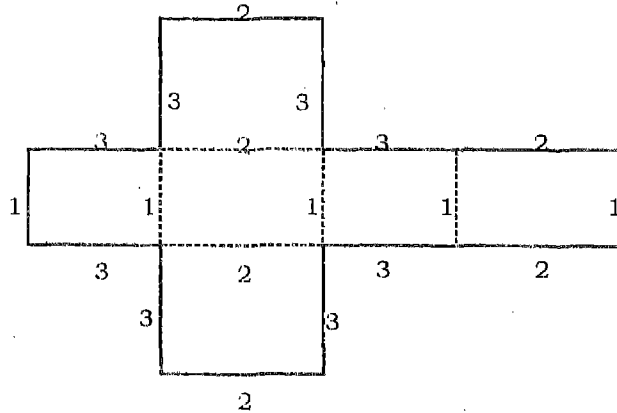
प्रश्नावली 15.1

1. अपने पर्यावरण में से चार ऐसी वस्तुओं के नाम दीजिए जिनकी आकृति हो
   (i) घनाभ जैसी। (ii) घन जैसी।
2. एक घनाभ को निरूपित करने वाली आकृति बनाइए। इसके शीर्षों को P, Q, R, S, T, U, V और W नाम दीजिए। अब
   (i) इसके फलकों के नाम लिखिए।
   (ii) इसकी कोरों के नाम लिखिए।
3. आकृति 15.4 एक घनाभ को निरूपित करती है। कुछ कोरों की लंबाइयाँ संकेतों x, y और z से दिखाई गई हैं। शेष कोरों की लंबाइयाँ लिखिए।

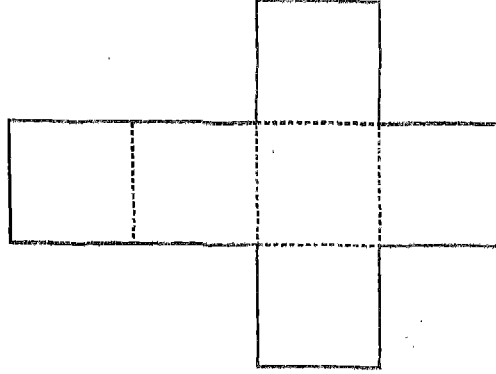
आकृति 15.4

4. आकृति 15.4 में, EFGH को यदि आधार मानें, तो चारों पार्श्वीय फलकों के नाम बताइए।
5. आकृति 15.4 में, EFGH को यदि आधार मानें, तो घनाभ की ऊँचाई बताने वाले किसी रेखाखंड का नाम बताइए।
6. आकृति 15.4 में, नाम बताइए:
   (i) AEHD के सम्मुख फलक का।
   (ii) BFGC के आसन्न फलकों का।
   (iii) कोर AB में मिलने वाले फलकों का।
   (iv) उन तीन कोरों का जो शीर्ष H पर मिलती हैं।

7. आकृति 15.4 में, उन तीन फलकों का नाम बताइए जिनमें शीर्ष A सार्व है। उस शीर्ष का नाम भी बताइए जिसमें शेष तीन फलक मिलते हैं। क्या यह शीर्ष G है? *A और G को सम्मुख शीर्षों का एक युग्म कहते हैं। रेखाखंड AG को घनाभ का एक विकर्ण कहते हैं।* घनाभ में कुल कितने विकर्ण हैं? इन सबके नाम लिखिए।

8. आकृति 15.5 में दिए गए चित्र को अक्स कागज पर उतारिए। एक कड़े कागज पर इसकी प्रतिलिपि बनाइए। इसे काटकर बिंदुकित रेखाओं पर इस प्रकार मोड़िए कि एक-सी संख्याओं से चिह्नित रेखाखंड एक दूसरे के समांतर या संपाती रहें। यह भी ध्यान रहे कि भिन्न संख्याओं वाली कोई भी दो कोरें संपाती न हों। प्राप्त ठोस का आकार क्या है? सैलोटेप की सहायता से कोरों को जोड़ लीजिए। इस प्रकार प्राप्त ठोस के सम्मुख फलकों को एक ही रंग से रँगिए।

(**टिप्पणीः** आकृति 15.5 को *घनाभ का जाल* (*net*) कहते हैं।)

आकृति 15.5

9. (छः सर्वांगसम वर्गों से बनी) आकृति 15.6 के चित्र को अक्स कागज पर उतारिए। एक कड़े कागज पर इसकी प्रतिलिपि बनाइए। इसे काटकर बिंदुकित रेखाओं के साथ-साथ उसी प्रकार मोड़िए जैसे कि घनाभ के लिए किया था। प्राप्त ठोस का आकार क्या है? सैलोटेप की सहायता से कोरों को जोड़िए। इस प्रकार प्राप्त ठोस के सम्मुख फलकों को एक ही रंग से रंगिए।

(**टिप्पणीः** आकृति 15.6 को *घन का जाल* कहते हैं।)

आकृति 15.6

10. रिक्त स्थानों की पूर्ति इस प्रकार करिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हो जाएँ:
    (i) किसी भी घनाभ के फलकों की संख्या .... होती है।
    (ii) किसी भी घनाभ की कोरों की संख्या .... होती है।
    (iii) घनाभ के दो आसन्न फलक एक रेखाखंड में मिलते हैं जिसे .... कहते हैं।
    (iv) घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई इसकी तीन .... कहलाती हैं।
    (v) घनाभ के पार्श्व फलकों की संख्या .... होती है।
    (vi) जिस घनाभ की सभी कोरें बराबर हों, उसे .... कहते हैं।
    (vii) घनाभ के शीर्षों की संख्या .... होती है।
    (viii) घनाभ की तीन संगामी कोरें एक बिंदु पर मिलती हैं, जिसे घनाभ का .... कहते हैं।
    (ix) घन के सभी फलक .... होते हैं।
    (x) घनाभ में सम्मुख फलकों के .... युग्म होते हैं।
    (xi) घन के प्रत्येक शीर्ष में से निकलने वाली कोई-सी भी दो कोरें एक-दूसरे के साथ .... का कोण बनाती हैं।
    (xii) घन में .... विकर्ण होते हैं।

15.3 पृष्ठीय क्षेत्रफल

आपने शायद ध्यान दिया होगा कि बाजार में बिकने वाली अधिकांश वस्तुएँ कनस्तरों, पेटियों अथवा गत्ते या लकड़ी के डिब्बों आदि में डालकर बेची जाती हैं। इनमें से अधिकांश

कनस्तर, पेटियाँ और डिब्बे (packings) घनाभाकार होते हैं। स्वाभाविक होगा कि निर्माता पहले से ही यह जानना चाहेगा कि इन डिब्बों, कनस्तरों, पेटियों आदि को बनाने में टीन, गत्ते या स्टील की कितनी चद्दरों की आवश्यकता होगी। यह जानने के लिए, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना पड़ता है।

हम जानते ही हैं कि घनाभ का पृष्ठ (surface) छः आयताकार फलकों से बना होता है (आकृति 15.7)। इन छः आयताकार फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल *घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) कहलाता है।* माना कि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई (सेमी में) क्रमशः l, b और h हैं। तब,

नीचे (आधार) और ऊपर वाले फलकों का क्षेत्रफल

$$= (l \times b + l \times b) \text{ सेमी}^2$$
$$= 2lb \text{ सेमी}^2$$

आकृति 15.7

दाईं और बाईं ओर के फलकों का क्षेत्रफल

$$= (b \times h + b \times h) \text{ सेमी}^2$$
$$= 2bh \text{ सेमी}^2$$

सामने और पीछे वाले फलकों का क्षेत्रफल

$$= (h \times l + h \times l) \text{ सेमी}^2$$
$$= 2hl \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= (2lb + 2bh + 2hl)$ सेमी^{2}

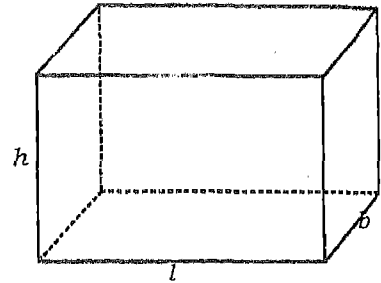
$$= 2\,(lb + bh + hl) \text{ सेमी}^2$$

इस प्रकार, लंबाई l, चौड़ाई b और ऊँचाई h मात्रक वाले घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\,(lb + bh + hl)$ वर्ग मात्रक होता है।

स्पष्टतः घनाभ का पार्श्वीय (या पार्श्व) पृष्ठीय क्षेत्रफल होगाः

$2\,(lh + bh)$ वर्ग मात्रक $= 2\,(l + b)\,h$ वर्ग मात्रक

= आधार का परिमाप × ऊँचाई

ध्यान दीजिए कि इसी सूत्र का प्रयोग किसी आयताकार कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल निकालने के लिए किया जा सकता है।

चूँकि घन के लिए $l = b = h$ होता है, अत:, l मात्रक भुजा वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\,(l \times l + l \times l + l \times l)$ वर्ग मात्रक

$= 6\,l^2$ वर्ग मात्रक

और इसका पार्श्वीय पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(l \times l + l \times l)$

$= 4\,l^2$ वर्ग मात्रक

टिप्पणियाँ: 1. पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालते समय लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई एक ही मात्रक में होना आवश्यक है।

2. 'कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल' के लिए वाक्यांश 'संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल' या केवल 'संपूर्ण पृष्ठ' का प्रयोग भी किया जाता है। इसी प्रकार, 'पार्श्वीय पृष्ठीय क्षेत्रफल' के लिए 'पार्श्वीय पृष्ठ' का प्रयोग किया जाता है।

आइए, अब कुछ उदाहरणों द्वारा इन सूत्रों का प्रयोग समझा जाए।

उदाहरण 1: लंबाई 10 सेमी, चौड़ाई 8 सेमी और ऊँचाई 5 सेमी वाले घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ (लंबाई) $l = 10$ सेमी, (चौड़ाई) $b = 8$ सेमी, और (ऊँचाई) $h = 5$ सेमी है।

अत:, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(lb + bh + hl)$

$= 2\,(10 \times 8 + 8 \times 5 + 5 \times 10)$ वर्ग सेमी^{2}

$= 2 \times 170$ वर्ग सेमी^{2}

$= 340$ वर्ग सेमी^{2}

उदाहरण 2: एक घन की कोर 5 मी लंबी है। घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ (कोर) $l = 5$ मी

अत:, घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$

$= 6 \times (5)^2$ वर्ग मी

$= 6 \times 25$ वर्ग मी

$= 150$ वर्ग मी

उदाहरण 3: 1.5 मी लंबा, 1.25 मी चौड़ा और 65 सेमी गहरा, प्लास्टिक का एक संदूक बनाना है। इसे ऊपर से खुला रखना है। प्लास्टिक की शीट की मोटाई पर ध्यान न देते हुए, ज्ञात कीजिए:

(i) संदूक बनाने के लिए आवश्यक शीट का क्षेत्रफल।

(ii) आवश्यक शीट का मूल्य, यदि 7 मी × 3.5 मी माप वाली शीट का मूल्य 510 रु हो।

हल: (i) यहाँ $l = 1.5$ मी, $b = 1.25$ मी और $h = 65$ सेमी $= \frac{65}{100}$ मी या 0.65 मी।

क्योंकि संदूक ऊपर से खुला है, अत: इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल

= नीचे वाले फलक (आधार) का क्षेत्रफल + पार्श्वीय फलकों का क्षेत्रफल

$= l \times b + 2(l + b) \times h$

$= 1.5 \times 1.25$ मी^{2} $+ 2(1.5 + 1.25) \times 0.65$ मी^{2}

$= 5.45$ मी^{2}

(ii) शीट का क्षेत्रफल $= 7 \times 3.5$ मी^{2}

$= 24.5$ मी^{2}

अत:, 24.5 मी^{2} शीट का मूल्य = 510 रु

$\therefore$ 1 मी^{2} शीट का मूल्य $= \frac{510}{24.5}$ रु

$\therefore$ 5.45 मी^{2} शीट का मूल्य $= \frac{510 \times 5.45}{24.5}$ रु

$= 113.45$ रु

उदाहरण 4: एक कमरा 5 मी लंबा, 4 मी चौड़ा और 3 मी ऊँचा है। इसकी दीवारों और छत पर 7.50 रु प्रति मी^{2} की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: चारों दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(l + b) \times h$

$= 2(5 + 4) \times 3$ मी^{2}

$= 54$ मी^{2}

छत का क्षेत्रफल $= l \times b = 5 \times 4$ मी^{2} $= 20$ मी^{2}

जिस स्थान पर सफेदी करानी है, उसका कुल क्षेत्रफल $= (54 + 20)$ मी^{2}

$= 74$ मी^{2}

अत:, 7.50 रु प्रति मी^{2} की दर से सफेदी कराने का व्यय

$= 7.50 \times 74$ रु

$= 555$ रु

टिप्पणी: किसी हॉल या कमरे की चारों दीवारों से जुड़े सभी प्रश्नों में, हम दीवारों में उपस्थित खिड़कियों और दरवाजों को अनदेखा कर देंगे।

प्रश्नावली 15.2

1. अपने पर्यावरण से ऐसे तीन उदाहरण दीजिए जहाँ पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने की आवश्यकता पड़े।
2. खाने के उस डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी विमाएँ 15 सेमी, 9 सेमी और 8 सेमी हैं।
3. चाक के उस डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 16 सेमी, 8 सेमी और 6 सेमी हैं।
4. लंबाई 0.5 मी, चौड़ाई 25 सेमी और ऊँचाई 15 सेमी वाले एक बंद गत्ते के डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. उस घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा है:

   (i) 11 सेमी (ii) 1.2 मी (iii) 27 सेमी
6. 15 सेमी भुजा वाले लकड़ी के एक घनाकार संदूक का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. तेल के एक डिब्बे की विमाएँ 26 सेमी $\times$ 26 सेमी $\times$ 45 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए:

   (i) ऐसे 20 डिब्बे बनाने के लिए आवश्यक टीन की चादर का क्षेत्रफल।

   (ii) 20 रु प्रति मी^{2} की दर से इन डिब्बों को बनाने में लगने वाली टीन की चादर का मूल्य।
8. एक ढक्कनदार डिब्बा घनाभाकार है। इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 1 मी 30 सेमी, 75 सेमी और 20 सेमी हैं। 4 रु प्रति सेमी^{2} की दर से इसकी बाहरी सतह पर रोगन कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
9. एक घनाभाकार डिब्बे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 2 मी 10 सेमी, 1 मी और 80 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए:

   (i) डिब्बे को ढकने के लिए आवश्यक कैनवस का क्षेत्रफल।

   (ii) 50 रु प्रति मी^{2} की दर से डिब्बे को ढकने के लिए आवश्यक कैनवस का मूल्य।
10. समतल छत वाले एक आयताकार खलिहान की चौड़ाई 10 मी, लंबाई 15 मी और ऊँचाई 5 मी है। इसे अंदर की ओर दीवारों और छत पर रोगन कराना है, परंतु फर्श पर नहीं। रोगन किए जाने वाले स्थान का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. एक कमरे की दीवारों और छत पर सीमेंट का पलस्तर कराया जाना है। यदि कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4.5 मी, 3 मी और 3.5 मी हों, तो पलस्तर किए जाने वाले स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12. एक कक्षा का कमरा 11 मी लंबा, 8 मी चौड़ा और 5 मी ऊँचा है। इसके फर्श और चारों दीवारों के क्षेत्रफलों का योगफल ज्ञात कीजिए।

13. एक तरणताल 20 मी लंबा, 15 मी चौड़ा और 4 मी गहरा है। 36 रु प्रति मी^{2} की दर से इसके फर्श और दीवारों पर सीमेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

14. एक आयताकार हॉल के फर्श का परिमाप 250 मी है। यदि इसकी ऊँचाई 6 मी हो, तो 20 रु प्रति मी^{2} दर से उसकी चारों दीवारों पर रोगन कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

15. पेंट के एक डिब्बे में बस इतना रोगन है कि इससे 9.375 मी^{2} क्षेत्रफल पर रोगन किया जा सके। इस डिब्बे के पेंट से विमाओं 22.5 सेमी $\times$ 10 सेमी $\times$ 7.5 सेमी वाली कितनी ईंटों पर रोगन किया जा सकता है?

[*संकेतः* एक ईंट का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।]

15.4 आयतन

समतल क्षेत्रों की ही भाँति, हम दो दिए गए ठोस (आकाशीय या त्रिविम) क्षेत्रों के लिए भी एक के दूसरे से बड़ा या छोटा होने की बात कर सकते हैं। इस प्रकार, दो ठोस क्षेत्रों की तुलना की जा सकती है। दूसरे शब्दों में, एक ठोस क्षेत्र का कुछ *परिमाण* या *आकार* या *मात्रा* या *माप* होता है। किसी ठोस क्षेत्र के माप या परिमाण को उसका *आयतन* (*volume*) कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी ठोस द्वारा घेरे गए आकाश या अंतरिक्ष या स्थान (वास्तव में ठोस क्षेत्र) के माप को उसका आयतन कहते हैं। आयतन की धारणा व्यवहार में बहुत उपयोगी सिद्ध होती है। उदाहरणतः, वास्तविक जीवन में आने वाली निम्नलिखित समस्याओं पर विचार कीजिए:

1. पानी एकत्र करने के लिए एक आयताकार टंकी ऊँचाई पर बनाई गई है। टंकी का घनाभाकार क्षेत्र जितना अधिक बड़ा होगा, उतना ही अधिक पानी भी उसमें एकत्र किया जा सकेगा।

2. तेल रखने के लिए टीन का एक आयताकार डिब्बा बनाया जाना है। डिब्बे के घनाभाकार क्षेत्र का आयतन जितना अधिक होगा, उतना ही अधिक तेल उसमें रखा जा सकेगा।

3. स्कूल में एक दीवार बनाई जानी है और हम जानना चाहते हैं कि इसके लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता पड़ेगी। अब दीवार एक घनाभाकार क्षेत्र है, और ईंट भी। ईंट और दीवार का आयतन ज्ञात होने पर, हम ईंटों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि आयतन किसी घनाभाकार क्षेत्र का परिमाण होता है। तब भी हम प्राय: घनाभ के आयतन की बात करेंगे, जबकि हमारा तात्पर्य इस घनाभ द्वारा निर्धारित घनाभाकार क्षेत्र के आयतन से होगा।

कई बार केवल देखने पर से ही यह निर्णय किया जा सकता है कि दो ठोस क्षेत्रों में से कौन-सा बड़ा या छोटा है। उदाहरण के लिए,

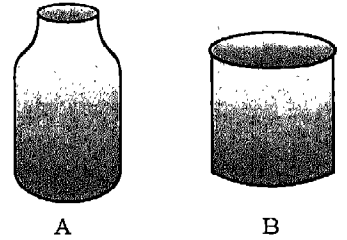
(i) संदूक में पड़ी किसी फुलाई हुई फुटबॉल का आयतन संदूक के आयतन से *बहुत* कम होगा।

(ii) कमरे में पड़े किसी डिब्बे का आयतन कमरे में भरी हुई हवा के आयतन से *कहीं* कम होगा।

(iii) किसी सूटकेस का आयतन किसी अलमारी के आयतन से *कहीं* कम होगा।

(iv) रेल के एक डिब्बे का आयतन एक अलमारी के आयतन से *कहीं* अधिक होगा।

परंतु कई बार केवल देखने भर से निर्णय करना संभव नहीं हो पाता।

आकृति 15.8 में, दिखाए गए क्षेत्रों A और B को देखिए। यह सत्य है कि A और B दोनों में, दूध की एक ही मात्रा है फिर भी क्षेत्र A, क्षेत्र B से कुछ बड़ा लगता है। इस प्रकार, यों तो देखने भर से ही हम तुरंत किसी परिणाम पर पहुँच जाते हैं, परंतु हमारा परिणाम गलत हो सकता है। अत:, आकाशीय (ठोस) क्षेत्रों की तुलना के लिए, हमें किसी अधिक अच्छी विधि की आवश्यकता है। इसके लिए, हम आयतन को मापने के लिए वैसी ही विधि अपनाएँगे, जैसी हमने पिछली कक्षाओं में क्षेत्रफल और लंबाई मापने के लिए अपनाई थी।

आकृति 15.8

15.5 आयतन का माप — मानक मात्रक की आवश्यकता

आइए, आकृति 15.9 में दिखाए गए क्षेत्रों A और B की तुलना करें। स्पष्टत: क्षेत्र A, क्षेत्र B से बड़ा है। कितने गुना बड़ा? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए खाली ड्रम A से आरंभ कीजिए और बाल्टी B की सहायता से इसमें पानी उंडेलिए। माना कि जब पानी से भरी 20 बाल्टियाँ

इसमें उंडेली जाती हैं, तो यह ड्रम पूरा भर जाता है। तब हम कहते हैं कि

A का आयतन = 20 × (B का आयतन)

यदि B को एक मात्रक मान लिया जाए, तो हम कह सकते हैं कि

A का आयतन = 20 मात्रक (B = आयतन का एक मात्रक)

ऊपर क्षेत्र A को क्षेत्र B के पदों में मापा गया। संभव है कि क्षेत्र A में, क्षेत्र B (20 के स्थान पर) किसी भिन्नात्मक संख्या (जैसे $20\frac{1}{3}$) बार आए। ऐसी दशा में A का आयतन यही भिन्नात्मक संख्या होगी। आगे, क्षेत्र A किसी भिन्न व्यक्ति द्वारा किसी अन्य क्षेत्र, माना कि C के पदों में मापा जा सकता है (आकृति 15.10)। स्पष्ट है कि इस स्थिति में क्षेत्र A का आयतन 20 मात्रक न होकर कुछ और, जैसे कि लगभग 40 मात्रक (C = आयतन का एक मात्रक) हो सकता है।

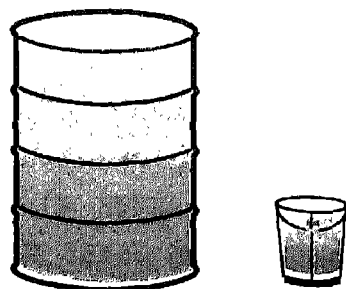
आकृति 15.9

आकृति 15.10

इस प्रकार, यदि प्रत्येक व्यक्ति अपना-अपना मात्रक चुने, तो आवश्यक नहीं कि एक व्यक्ति द्वारा ज्ञात आयतन वही हो जो कोई अन्य व्यक्ति प्राप्त करता है। इस कारण आयतन का कोई ऐसा सार्व *मानक मात्रक* (*standard unit*) होना चाहिए, जिसे सभी समझ सकें।

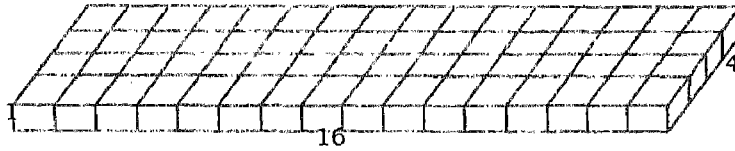
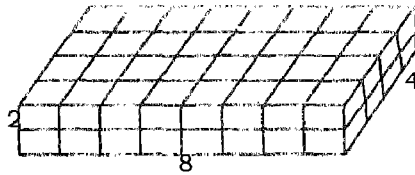
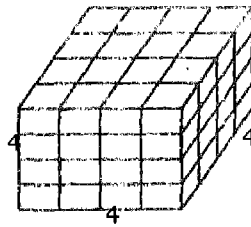
15.6 आयतन के कुछ मानक मात्रक

याद कीजिए कि पिछली कक्षाओं में क्षेत्रफल मापने के लिए 1 सेमी, 1 मिमी या 1 मी भुजा वाले वर्ग को मानक मात्रक माना गया था और क्षेत्रफलों को वर्ग सेंटीमीटरों (सेमी^{2}) या वर्ग मिलीमीटरों (मिमी^{2}) या वर्ग मीटरों (मी^{2}) आदि में व्यक्त किया गया था। इसी प्रकार, आयतन को मापने के लिए, भुजा 1 सेमी (या 1 मिमी या 1 मी) वाले घन को मानक मात्रक (*unit*) माना जाता है (आकृति 15.11) और आयतन को घन सेंटीमीटरों (सेमी^{3}) या घन मिलीमीटरों (मिमी^{3}) या घन मीटरों (मी^{3}) में व्यक्त किया जाता है। यदि किसी ठोस क्षेत्र S में ऐसे V मात्रक घन आएँ, तो हम कहते हैं कि

S = V सेमी^{3} या V मिमी^{3} या V मी^{3} (प्रयुक्त मात्रक के अनुसार)

1 सेमी

आकृति 15.11

15.7 घनाभ और घन का आयतन

जब आप छोटे थे, तो अवश्य ही प्लास्टिक या लकड़ी से बने घनाकार टुकड़ों से खेले होंगे। आइए, 64 बराबर घन लें जिनकी भुजा, माना कि 1 सेमी है, और इन्हें एक घनाभ के रूप में रखें। स्पष्ट है कि इन घनों से कई भिन्न-भिन्न घनाभ बनाए जा सकते हैं। इनमें से तीन आकृति 15.12 में दिखाए गए हैं:

I

II

III

आकृति 15.12

इनमें से प्रत्येक घनाभ के आयतन के विषय में क्या कहा जा सकता है? क्योंकि इनमें से प्रत्येक 64 *मात्रक* (*unit*) घनों को एक साथ रखकर बनाया गया है, अतः इनमें से प्रत्येक घन का आयतन 64 *घन मात्रक* (*cubic units*), अर्थात् 64 सेमी^{3} है।

ऊपर के घनाभों की लंबाई (l), चौड़ाई (b), ऊँचाई (h) और इनके गुणनफल $l \times b \times h$ के विषय में क्या कहा जा सकता है? इनसे संबद्ध (प्रेक्षणों) तथ्यों को नीचे दिखाई गई सारणी के रूप में प्रस्तुत (अभिलेखित) किया जा सकता है:

सारणी: घनाभ का आयतन

घनाभ	लंबाई (l) सेमी में	चौड़ाई (b) सेमी में	ऊँचाई (h) सेमी में	आयतन ($l \times b \times h$) सेमी^{3} में
I	16	4	1	64
II	8	4	2	64
III	4	4	4	64

मात्रक घनों की कोई अन्य उपयुक्त संख्या लेकर, हम इसी प्रकार का क्रियाकलाप कर, अपने प्रेक्षणों / परिणामों को ऊपर जैसी सारणी में लिख सकते हैं।

इन क्रियाकलापों और प्रेक्षणों से सुझाव मिलता है कि लंबाई l, चौड़ाई b और ऊँचाई h वाले घनाभ का आयतन $V = l \times b \times h$ होता है। अर्थात्

$$V = l \times b \times h$$

ध्यान दीजिए कि यदि l, b और h सेमी में हों, तो आयतन (V) सेमी^{3} में होगा। इसी प्रकार, अन्य मात्रकों के लिए भी होता है।

टिप्पणियाँ: 1. लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई का एक ही मात्रक में होना आवश्यक है।

2. ऊपर के सूत्र से यह भी देखा जा सकता है कि

$$\text{लंबाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}}$$

$$\text{चौड़ाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{लंबाई} \times \text{ऊँचाई}}$$

$$\text{ऊँचाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई}}$$

3. घन के लिए $l = b = h$ होता है। अत:,

$$\text{घन का आयतन} = l \times l \times l = l^3$$

4. क्योंकि 1 सेमी = 10 मिमी, अतः

$$1 \text{ सेमी}^3 = 10 \times 10 \times 10 \text{ मिमी}^3 = 1000 \text{ मिमी}^3$$

इसी प्रकार,

$$1 \text{ मी}^3 = 100 \times 100 \times 100 \text{ सेमी}^3 = 1000000 \text{ सेमी}^3 = 10^6 \text{ सेमी}^3$$

$$= 1000 \times 1000 \times 1000 \text{ मिमी}^3 = 10^9 \text{ मिमी}^3$$

5. द्रवों (*liquids*) के आयतन मापने के लिए, हम प्रायः लीटर (l) और मिलीलीटर (ml) मात्रकों का प्रयोग करते हैं। साथ ही,

$$1 \text{ सेमी}^3 = 1 \text{ मिली } (ml)$$

$$1000 \text{ सेमी}^3 = 1 \text{ ली } (l)$$

और $1 \text{ मी}^3 = 1000000 \text{ सेमी}^3 = 1000\ l = 1\ kl$ (1 किलोलीटर)

6. किसी बरतन के आयतन को लीटरों, मिलीलीटरों आदि के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। ऐसी दशा में, इस आयतन को *धारिता* (*capacity*) कहा जाता है।

अब हम ऊपर बताए गए सूत्रों का प्रयोग दिखाने के लिए कुछ उदाहरण लेंगे।

उदाहरण 5: लकड़ी के ऐसे टुकड़े का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 10 सेमी, 5 सेमी और 3 सेमी हैं।

हल: $V = l \times b \times h$

$$\therefore \quad V = 10 \times 5 \times 3 \text{ सेमी}^3 = 150 \text{ सेमी}^3$$

इस प्रकार, टुकड़े का आयतन 150 सेमी^{3} है।

उदाहरण 6: लंबाई 6.3 मी, चौड़ाई 4.5 मी और ऊँचाई 3.6 मी वाली पानी की टंकी का आयतन (धारिता) लीटरों में ज्ञात कीजिए।

हल: टंकी का आयतन $= l \times b \times h$

$$= 6.3 \times 4.5 \times 3.6 \text{ मी}^3$$

$$= 102.06 \text{ मी}^3$$

$$= 102.06 \times 100 \times 100 \times 100 \text{ सेमी}^3$$

$$= 102060000 \text{ सेमी}^3$$

$$= 102060 \text{ लीटर} \quad (\because 1000 \text{ सेमी}^3 = 1 \text{ लीटर})$$

इस प्रकार, टंकी की धारिता 102060 लीटर है।

उदाहरण 7: भुजा 8 मी वाले घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: आयतन $= l^3$

$= 8 \times 8 \times 8$ मी^{3}

$= 512$ मी^{3}

उदाहरण 8: एक टंकी की धारिता 60 किली है। यदि टंकी की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 5 मी और 4 मी हों, तो उसकी गहराई ज्ञात कीजिए।

हल: टंकी का आयतन = 60 किली

= 60000 ली

= 60 मी^{3} $\qquad (\because 1000$ ली $= 1$ मी$^3)$

$$\therefore \quad \text{गहराई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई}}$$

$$= \frac{60}{5 \times 4} \text{ मी} = 3 \text{ मी}$$

इस प्रकार, टंकी की गहराई 3 मी है।

प्रश्नावली 15.3

1. उस घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी क्रमशः लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं:
   (i) 12 सेमी, 10 सेमी, 8 सेमी (ii) 16.5 सेमी, 8.4 सेमी, 12.7 सेमी
   (iii) 121 मिमी, 54 मिमी, 256 मिमी (iv) 18.5 मी, 8.3 मी, 2.9 मी
   (v) 8 मी, 70 सेमी, 90 सेमी (vi) 1.5 मी, 25 सेमी, 15 सेमी
2. उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा है:
   (i) 15 मिमी (ii) 12.5 सेमी
   (iii) 2.6 मी (iv) 1.72 मी
3. घनाभाकार ठोस लकड़ी के एक टुकड़े में 36 सेमी^{3} लकड़ी है। यदि उसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 4 सेमी और 3 सेमी हों, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. एक माचिस की डिब्बी के माप 4 सेमी $\times$ 2.5 सेमी $\times$ 1.5 सेमी हैं। ऐसी 12 डिब्बियों के बंडल का आयतन क्या होगा?
5. घनाभाकार पानी की एक टंकी 6 मी लंबी, 5 मी चौड़ी और 4.5 मी गहरी है। इसमें कितने लीटर पानी समा सकता है?

6. एक घनाभाकार बर्तन 10 मी लंबा और 8 मी चौड़ा है। उसकी ऊँचाई क्या हो कि उसमें 480 घन मी द्रव समा सके?

7. चौड़ाई 2.5 मी, मोटाई 0.025 मी और आयतन 0.25 $मी^3$ वाली लकड़ी की शहतीर की लंबाई ज्ञात कीजिए।

8. 30 रु प्रति $मी^3$ की दर से 8 मी लंबे, 6 मी चौड़े और 3 मी गहरे घनाभाकार गड्ढे को खोदने का व्यय ज्ञात कीजिए।

9. एक घनाभाकार टंकी की धारिता 50000 ली पानी के बराबर है। यदि उसकी लंबाई और गहराई क्रमशः 2.5 मी और 10 मी हों, तो उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

10. 4000 की जनसंख्या वाले एक गाँव में प्रति व्यक्ति प्रति दिन 150 ली पानी की आवश्यकता है। इस गाँव में 20 मी $\times$ 15 मी $\times$ 6 मी माप की एक टंकी है। इस टंकी का पानी कितने दिन चलेगा?

11. छः सेमी भुजा वाले दो घन एक-दूसरे से सटाकर रखे गए हैं। इस प्रकार बने घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

12. एक गोदाम का माप 40 मी $\times$ 25 मी $\times$ 15 है। इस गोदाम में 1.5 मी $\times$ 1.25 मी $\times$ 0.5 मी माप वाली अधिक-से-अधिक लकड़ी की कितनी पेटियाँ आ सकती हैं?

[*संकेत:* लकड़ी की पेटियों की संख्या $= \dfrac{\text{गोदाम का आयतन}}{\text{एक पेटी का आयतन}}$]

13. माप 8 मी $\times$ 5 मी $\times$ 80 सेमी वाले लकड़ी के लट्ठे में से 20 सेमी भुजा वाले लकड़ी के कितने घनाकार टुकड़े काटे जा सकते हैं? यह मानकर चलिए कि काटने में लकड़ी का कोई भाग नष्ट नहीं हो रहा है।

14. 3 मी 60 सेमी भुजा वाले लकड़ी के एक घनाकार टुकड़े में से 12 सेमी भुजा वाले कितने घनाकार टुकड़े काटे जा सकते हैं?

15. किसी घन के आयतन में क्या अंतर आएगा, यदि इसकी भुजा को कर दिया जाए:

(i) दुगुना ? (ii) आधा ? (iii) तिगुना ?

याद रखने योग्य बातें

1. घनाभ, सर्वांगसम आयताकार सम्मुख फलकों के तीन युग्मों से आकाश में बनी ऐसी आकृति है, जिसके आपस में मिलने वाले कोई भी दो फलक एक रेखाखंड में ही मिलते हैं।
2. घनाभ के 6 फलक, 12 कोरें और 8 शीर्ष होते हैं।
3. आकाश का घनाभ में समाया भाग घनाभ का अभ्यंतर या अंत: क्षेत्र कहलाता है।
4. घनाभ और उसके अभ्यंतर को मिलाकर घनाभाकार क्षेत्र कहा जाता है।
5. घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई उसकी तीन विमाएँ कहलाती हैं।
6. जिस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई तीनों बराबर हों, उसे घन कहते हैं।
7. आकाशीय (ठोस) क्षेत्र के परिमाण या माप को उसका आयतन कहा जाता है।
8. एक घन सेंटीमीटर, 1 सेमी भुजा (या कोर) वाले घन का आयतन होता है।
9. V, l, b और h के प्रचलित अर्थों में,
   (i) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$
   (ii) घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$
   (iii) घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(l + b)h$
   (iv) घनाभ का आयतन $(V) = l \times b \times h$
   (v) घन का आयतन $(V) = l^3$
10. *आयतन के कुछ मानक मात्रक*
   (i) 1 मी^{3} = 1000000 सेमी^{3} = 100^3 सेमी^{3}
   (ii) 1 सेमी^{3} = 1000 मिमी^{3} = 10^3 मिमी^{3}
   (iii) 1 सेमी^{3} = 1 मिली
   (iv) 1 मी^{3} = 1000 ली = 1 किली

सांख्यिकी

अध्याय 16

16.1 भूमिका

सांख्यिकी (*statistics*) शब्द *लातीनी* (*latin*) भाषा के शब्द *स्टेटस* (*status*) से बना है। स्टेटस शब्द का अर्थ है *दशा* । किसी वस्तु या *परिघटना* (*phenomenon*) के विषय में तथ्य या सूचनाएँ प्रायः सांख्यिक मानों के रूप में मिलती हैं। इन सांख्यिक मानों को आँकड़े (*data*) कहा जाता है। किसी परिघटना के विषय में अधिक जानने के लिए, हमें इससे जुड़े आँकड़ों का विश्लेषण करना पड़ता है। गणित की जिस शाखा में आँकड़ों के समूहों का विश्लेषण करने की विधियों का अध्ययन किया जाता है, उसे *सांख्यिकी* (*Statistics*) कहते हैं।

सांख्यिक आँकड़ों की मात्रा अधिक होने पर इनसे निष्कर्ष निकालना एक कठिन कार्य हो जाता है। परंतु यदि आँकड़ों को चित्रों के रूप में प्रस्तुत किया जाए, तो ये समझ में आ जाते हैं। आँकड़ों के चित्र रूप में निरूपित किए जाने पर केवल इन्हें देख भर लेने से ही बहुत से निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। इस अध्याय में, हम आँकड़ों को चित्र रूप में निरूपित करना सीखेंगे। साथ ही, हम दंड *आलेखों* (*bar graphs*) को पढ़ना, उनके अर्थ बताना और उन्हें खींचना सीखेंगे।

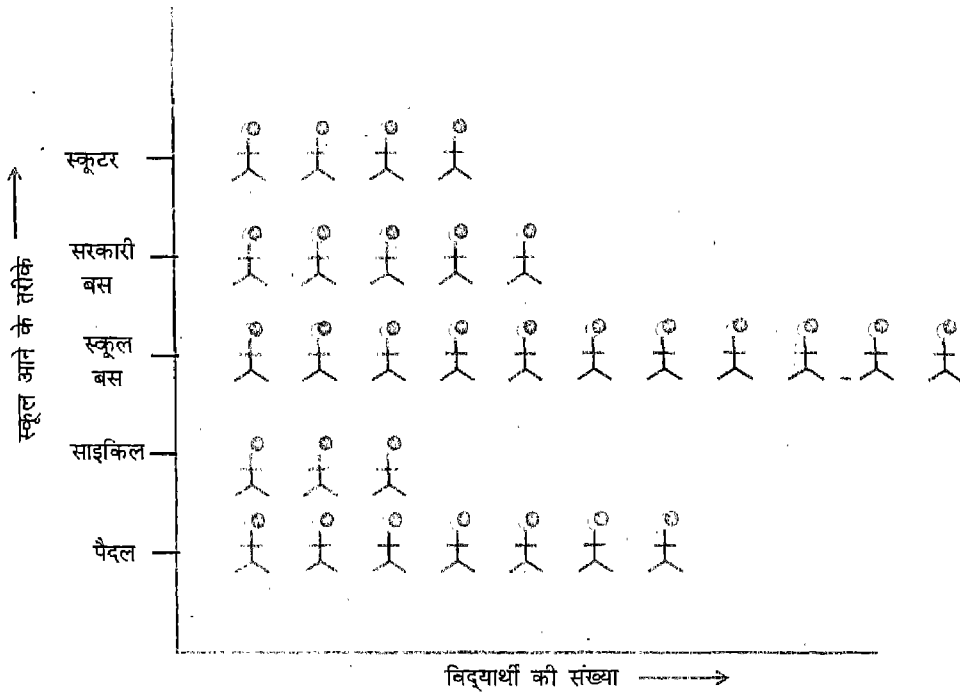
16.2 दंड आलेख

किसी स्कूल में यह जानने के लिए एक सर्वेक्षण किया गया कि बच्चे किस-किस तरीके से स्कूल आते हैं। इसके लिए कक्षा छः के 30 विद्यार्थियों से साक्षात्कार किया गया। प्राप्त आँकड़ों को नीचे दी गई सारणी के रूप में लिखा गया:

सारणी 1: स्कूल आने के प्रचलित तरीके

आने का तरीका	*पैदल*	*साइकिल*	*स्कूल बस*	*सरकारी बस*	*स्कूटर*
विद्यार्थियों की संख्या	7	3	11	5	4

इन आँकड़ों की विशेषताएँ (के अभिलक्षण) समझने में चित्रों का प्रयोग बहुत सहायता कर सकता है। सांख्यिक आँकड़ों को चित्रों में व्यक्त करना आँकड़ों का *चित्रमय निरूपण* (*pictorial representation*) कहलाता है।

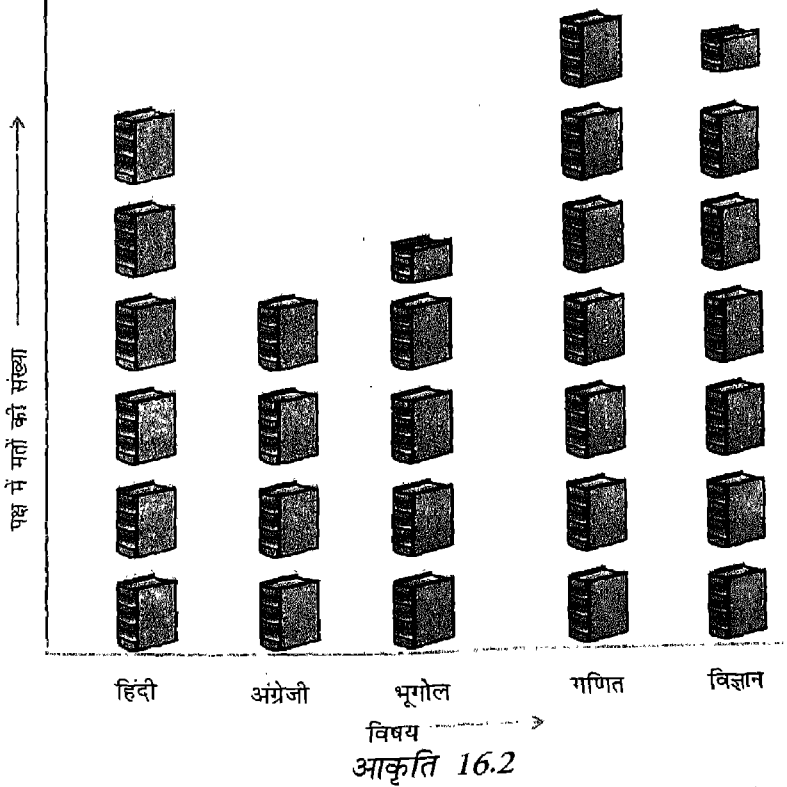
सारणी 1 के एक विद्यार्थी के लिए एक संकेत (चित्र) 🯅 का प्रयोग करने पर, आकृति 16.1 प्राप्त होती है।

आकृति 16.1

आँकड़ों के ऐसे चित्रमय निरूपण को *चित्रालेख* (*pictograph*) कहा जाता है। ऊपर के चित्रालेख से तुरंत यह ज्ञात हो जाता है कि स्कूल बस स्कूल आने का सबसे अधिक लोकप्रिय तरीका है। यों तो हम यह निष्कर्ष सीधे–सीधे सारणी की संख्याओं 7, 3, 11, 5,4 की तुलना कर निकाल भी सकते थे, परंतु चित्रालेख को देखने भर से निर्णय करना अधिक आसान है। और फिर, बड़े-बड़े आँकड़ों में संख्याओं की तुलना करना कठिन हो सकता है और समय भी अधिक लग सकता है, जबकि चित्रालेख से तथ्य जानने के लिए इस पर एक नजर डालना ही पर्याप्त है।

एक और सर्वेक्षण लेते हैं, जो एक स्कूल में यह जानने के लिए किया गया कि कक्षा VII के विद्यार्थियों में स्कूल में पढ़ाया जा रहा कौन–सा विषय लोकप्रिय है। प्रत्येक विषय के पक्ष में पड़े मत बताने वाले आँकड़े सारणी 2 में आगे दिए गए हैं:

सारणी 2: कक्षा VII के विद्यार्थियों में लोकप्रिय विषय

विषय	*हिंदी*	*अंग्रेजी*	*भूगोल*	*गणित*	*विज्ञान*
विद्यार्थियों की संख्या	30	20	21	35	31

दिए गए आँकड़ों को निरूपित करने के लिए, हम फिर से संकेतों या चित्रों का प्रयोग करेंगे। माना कि एक *पुस्तक 5 मतों (मात्रकों)* को निरूपित करती है और एक अपूर्ण चित्र *आंशिक मात्रकों (पाँच से कम मतों)* को निरूपित करता है (आकृति 16.2)।

आकृति 16.2

आकृति 16.2 में आप क्या देखते हैं? कक्षा VII के विद्यार्थियों में अन्य विषयों की तुलना में गणित स्कूल में पढ़ाए जाने वाले विषयों में सबसे अधिक लोकप्रिय है।

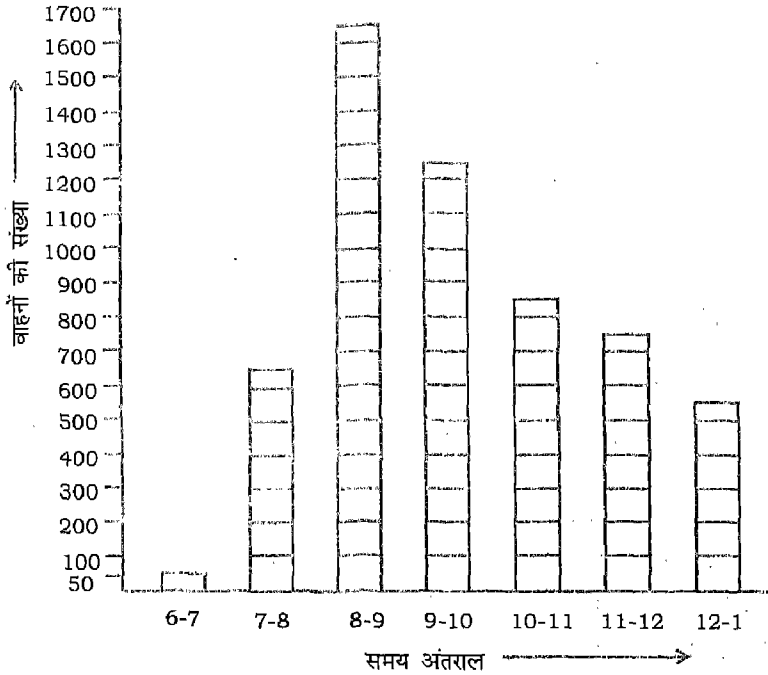
ऊपर की बातों से हमने सीखा कि सांख्यिक आँकड़ों को चित्रालेखों से निरूपित करने से हमें आँकड़ों के विशेष गुण एक ही नजर में जान लेने में सहायता मिलती है। किंतु आँकड़ों को इस प्रकार निरूपित करने में समय तो लगता ही है, कठिनाई भी होती है। विशेष रूप से तब, जब हमें चित्रों के साथ-साथ अपूर्ण चित्रों के संकेत भी बनाने हों। अतः चित्र-संकेतों के स्थान पर आँकड़ों को निरूपित करने के लिए दंड (*bars* या *आयत*) खींचना सुविधाजनक होता है। इसके लिए, दिए गए आँकड़ों के संगत, बराबर दूरी पर बराबर चौड़ाई के क्षैतिज (पड़े) अथवा ऊर्ध्वाधर (खड़े) दंड खींच लिए जाते हैं।

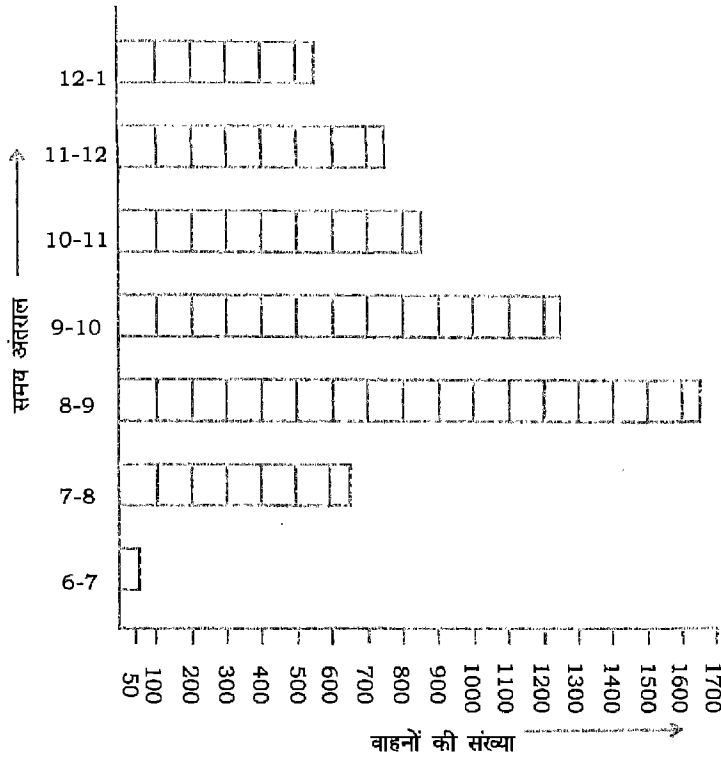
ऊपर बताई गई बातों को अधिक स्पष्ट करने के लिए यातायात-प्रदूषण से जुड़ी निम्नलिखित समस्या के दंड आलेख पर विचार किया जाएगा।

उदाहरण 1: एक विशेष दिन दिल्ली की यातायात-पुलिस ने एक भीड़-भाड़ वाले चौराहे पर आते-जाते वाहनों का अध्ययन किया। सारणी 3 में, सुबह छः बजे से दोपहर एक बजे के बीच प्रत्येक एक घंटे में इस चौराहे से गुजरने वाले वाहनों की संख्या दिखाई गई है। आँकड़े निकटतम दहाइयों में लिए गए हैं।

सारणी 3: एक चौराहे पर वाहनों का आवागमन (प्रातः छः बजे से दोपहर एक बजे तक)

समय, घंटों में	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12	12–1
वाहनों की संख्या	50	650	1650	1250	850	750	550

सारणी 3 में दी गई सूचना का दंड आलेख आकृति 16.3 में दिखाया गया है।

आकृति 16.3: विभिन्न समय अंतरालों में किसी चौराहे से होकर गुजरने वाले वाहनों की संख्या को दर्शाने वाला दंड आलेख

ध्यान दीजिए कि दिए गए आँकड़ों को समय-अंतराल ऊर्ध्वाधर और दंड क्षैतिज दिशा में खींचकर भी निरूपित किया जा सकता है (आकृति 16.4)। परंतु सामान्यतः ऊर्ध्वाधर दंड आलेख (आकृति 16.3) अधिक पसंद किए जाते हैं।

आकृति 16.4: विभिन्न समय अंतरालों में किसी चौराहे से होकर गुजरने वाले वाहनों की संख्या को दर्शाने वाला दंड आलेख

इस प्रकार, हमने देखा कि दंड *आलेख सांख्यिक आँकड़ों का एक आधार-रेखा पर समान दूरी पर बने बराबर चौड़ाई वाले क्षैतिज अथवा ऊर्ध्वाधिर दंडों या आयतों की श्रृंखला द्वारा चित्रमय निरूपण है।* प्रत्येक आयत या दंड सांख्यिक आँकड़ों के केवल एक ही मान को निरूपित करता है। अतः, दंडों की संख्या सांख्यिक आँकड़ों के भिन्न मानों की संख्या के बराबर होती है। प्रत्येक दंड की ऊँचाई या लंबाई, किसी उपयुक्त *मापदंड* (*scale*) पर, एक सांख्यिक आँकड़े का मान निरूपित करती है। दंड आलेखों की रचना करना सीखने से पहले, हम किसी दिए गए दंड आलेख को पढ़ना और उसका अर्थ बताना सीखेंगे।

16.3 दंड आलेखों को पढ़ना

किसी दंड आलेख को पढ़ने के लिए, कुछ बिंदुओं पर पूरी सावधानी से विशेष ध्यान देना होगा। उदाहरणतः, आकृति 16.3 के दंड आलेख को पढ़ने पर हम पाते हैं कि

(i) दंड आलेख एक विशेष दिन पर प्रातः छः बजे से दोपहर एक बजे तक दिल्ली के एक भीड़-भाड़ वाले चौराहे से गुजरने वाले वाहनों की संख्या दिखाता है।

(ii) समय-अंतराल एक क्षैतिज रेखा पर दिखाए गए हैं और एक उपयुक्त मापदंड पर वाहनों की संख्या ऊर्ध्वाधर रेखा पर दिखाई गई है।

(iii) मापदंड है: एक मात्रक लंबाई = 100 वाहन

(iv) किसी दंड की ऊँचाई, उस दंड के संगत समय-अंतराल में, इस चौराहे से गुजरने वाले वाहनों की संख्या को इंगित करती है।

16.4 दंड आलेखों का अर्थ बताना

किसी दिए गए दंड आलेख का अर्थ बताने से हमारा तात्पर्य इससे निष्कर्ष निकालने से होता है। आकृति 16.3 के दंड आलेख को लीजिए। इससे क्या निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं?

1. दंड आलेख एक विशेष दिन पर विभिन्न समय-अंतरालों में दिल्ली के एक चौराहे-विशेष से गुजरने वाले वाहनों की संख्या दिखाता है।
2. सबसे लंबा दंड वाहनों की अधिकतम संख्या के संगत है। इस प्रकार, अधिकतम वाहन (1650) चौराहे से 8-9 वाले घंटे में गुजरते हैं।
3. सबसे छोटा दंड वाहनों की न्यूनतम संख्या (50) के संगत है और यह समय 6-7 बजे के लिए है।
4. प्रात: काल की भाग-दौड़ वाले सबसे अधिक व्यस्त घंटों (स्कूलों, कार्यालयों और व्यापारिक प्रतिष्ठानों को जाने वालों के कारण) में कुल यातायात 1650 + 1250 = 2900 वाहन समय-अंतराल 8-10 में रहा, जैसा कि दो सबसे अधिक लंबे दंडों से ज्ञात होता है।

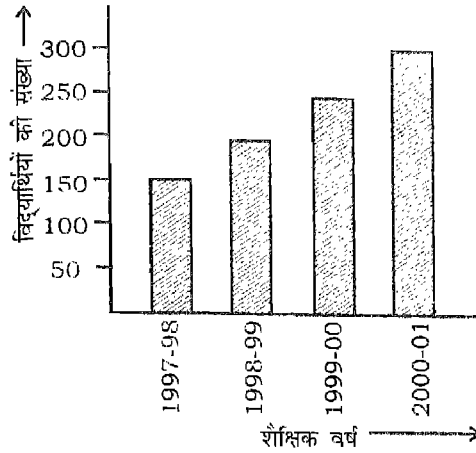
इस प्रकार, दंड आलेख दिए गए आँकड़ों को आसानी से समझने में सहायक होते हैं और इनको केवल देख कर ही निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

उदाहरण 2: आकृति 16.5 में दिखाए गए दंड आलेख को पढ़कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) दंड आलेख से क्या सूचना मिलती है?

(ii) विभिन्न वर्षों के अंतराल में विद्यार्थियों की संख्या में किस प्रकार का परिवर्तन देखने में आता है?

(iii) किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?

(iv) यह बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य:
'वर्ष 2000-01 में विद्यार्थियों की संख्या वर्ष 1999-2000 के विद्यार्थियों की संख्या की दुगुनी है।'

आकृति 16.5: शैक्षिक वर्षों 1997-98 से 2000-2001 तक में एक स्कूल की कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या का दंड आलेख

हल: पूछे गए प्रश्नों के उत्तर नीचे दिए गए हैं:

(i) दंड आलेख शैक्षिक वर्षों 1997-98 से 2000-01 तक में एक स्कूल की कक्षा VII के विद्यार्थियों की संख्या को निरूपित करता है।

(ii) विभिन्न वर्षों की अवधि में विद्यार्थियों की संख्या में परिवर्तन *एकसमान* (*uniform*, *एक ही जैसा*) है।

(iii) क्योंकि दंडों की ऊँचाई में वृद्धि एकसमान (बराबर) है, अत: विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि भी एकसमान है। अत:, किसी भी वर्ष अन्य वर्षों की तुलना में अधिक वृद्धि नहीं हुई।

(iv) वर्ष 2000-01 के संगत दंड की ऊँचाई, वर्ष 1999-2000 के संगत दंड की ऊँचाई की दुगुनी नहीं है। अत:, दिया गया कथन असत्य है।

16.5 ग्राफ कागज पर दंड आलेखों की रचना

अब हम दंड आलेख खींचना सीखेंगे। सुविधा और परिशुद्धता को ध्यान में रखते हुए, हम *ग्राफ* (*graph*) कागज का प्रयोग करेंगे। किंतु ऐसा करना आवश्यक नहीं है।

दंड आलेख खींचते समय निम्नलिखित नियमों को ध्यान में रखना चाहिए:

(i) यह बताने के लिए कि ग्राफ की विषय-वस्तु क्या है, या तो ग्राफ के ऊपर एक शीर्षक हो अथवा इसके नीचे एक वाक्यांश जो शीर्षक का काम दे।

(ii) ग्राफ के नीचे चुना गया मापदंड (स्केल) भी होना चाहिए।

(iii) सभी दंडों की चौड़ाई बराबर हो।

(iv) दंडों के बीच समान दूरी हो।

(v) प्रत्येक दंड का एक लेबल (*label*) हो।

दंड आलेखों की रचना उदाहरणों द्वारा समझाई जाएगी।

उदाहरण 3: नीचे दिए गए आँकड़े एक बैंक द्वारा कुछ वर्षों में ऋण दी गई राशि (करोड़ रुपयों में) दिखाते हैं:

वर्ष	*ऋण (करोड़ रुपयों में)*
1996	20
1997	25
1998	30
1999	45
2000	60

ऊपर वाली सूचना को दिखाने वाला एक दंड आलेख बनाइए।

हल: दंड आलेख की रचना निम्नलिखित चरणों में की जाएगी:

चरण 1: ग्राफ कागज पर दो परस्पर लंबवत् रेखाएँ खींचकर उन्हें क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्ष कहिए (आकृति 16.6)।

चरण 2: क्षैतिज अक्ष पर सूचना 'वर्ष' दिखाइए और ऊर्ध्वाधर अक्ष पर करोड़ रुपयों में संगत 'ऋण' दिखाइए।

चरण 3: दिए गए आँकड़ों के आधार पर, क्षैतिज अक्ष पर दंडों की एकसमान चौड़ाई और उनके बीच की समान दूरी उपयुक्त रूप से निश्चित कर लीजिए।

चरण 4: दिए गए आँकड़ों के अनुसार, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर एक उपयुक्त मापदंड लीजिए। यहाँ मापदंड इस प्रकार चुनिए:

ग्राफ कागज़ का 1 मात्रक = 10 करोड़ रुपए

अब इस चुने गए मापदंड के अनुसार, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर मानों के संगत चिह्न लगाइए। इससे दंडों की ऊँचाइयाँ प्राप्त हो जाएँगी।

चरण 5: अब विभिन्न वर्षों के लिए, दंडों की ऊँचाइयों का परिकलन इस प्रकार कीजिए:

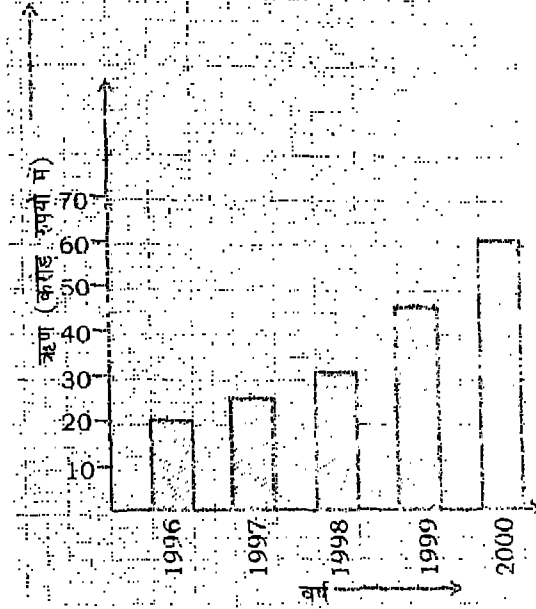
1996 : $\frac{1}{10} \times 20$ मात्रक = 2 मात्रक

1997 : $\frac{1}{10} \times 25$ मात्रक = 2.5 मात्रक

1998 : $\frac{1}{10} \times 30$ मात्रक = 3 मात्रक

1999 : $\frac{1}{10} \times 45$ मात्रक = 4.5 मात्रक

2000 : $\frac{1}{10} \times 60$ मात्रक = 6 मात्रक

चरण 6: अब आकृति 16.6 में दिखाए अनुसार, क्षैतिज अक्ष पर बराबर दूरी छोड़ते हुए बराबर चौड़ाई के पाँच दंड बनाइए, जिनकी ऊँचाइयाँ ऊपर चरण 5 में निकाली गई हैं। प्रत्येक दंड क्षैतिज अक्ष पर चिह्नित संगत वर्ष के ऊपर बनाइए।

मापदंड: ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश ग्राफ कागज का एक मात्रक = 10 करोड़ रुपए

आकृति 16.6: एक बैंक द्वारा वर्षों 1996-2000 के समय काल में दिए गए ऋणों (करोड़ रुपयों में) का दंड आलेख

आकृति 16.6 अभीष्ट दंड आलेख है।

उदाहरण 4: उदाहरण 1 में दी गई सूचना के लिए दंड आलेख की रचना कीजिए।

हल: आलेख की रचना में निम्नलिखित चरण हैं:

चरण 1: ग्राफ कागज का पन्ना लेकर उस पर परस्पर लंबवत् दो रेखाएँ खींचिए। क्षैतिज अक्ष पर 'समय-अंतराल' दिखाइए और ऊर्ध्वाधर अक्ष पर 'वाहनों की संख्या' दिखाइए।

चरण 2: यहाँ चुनिए: 200 वाहन = ग्राफ कागज का एक मात्रक ।

चरण 3: विभिन्न दंडों की ऊँचाइयाँ इस प्रकार निकालिए:

प्रात: 6 से 7 बजे = $\frac{1}{200} \times 50$ मात्रक = $\frac{1}{4}$ मात्रक

प्रात: 7 से 8 बजे = $\frac{1}{200} \times 650$ मात्रक = $3\frac{1}{4}$ मात्रक

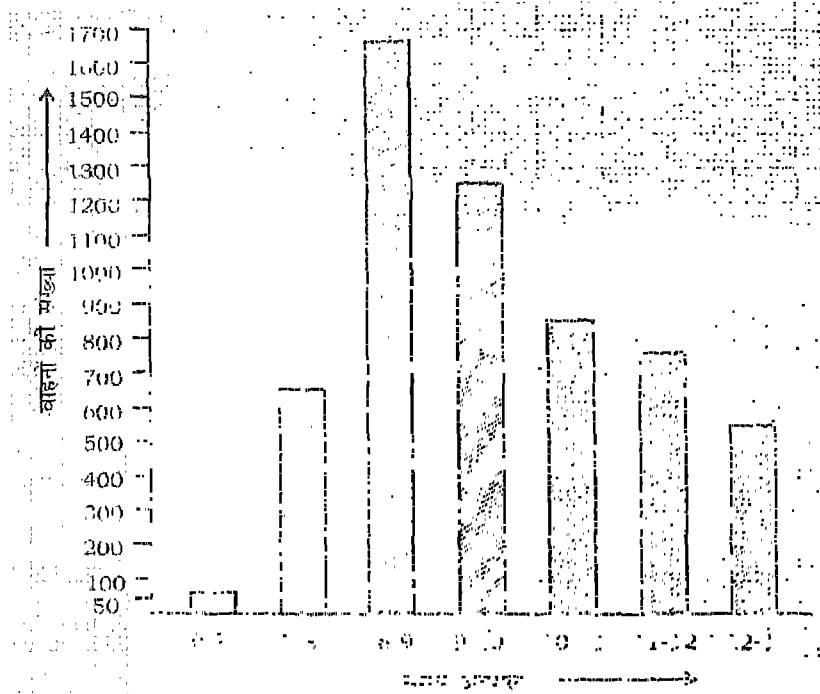
प्रात: 8 से 9 बजे $= \frac{1}{200} \times 1650$ मात्रक $= 8\frac{1}{4}$ मात्रक

प्रात: 9 से 10 बजे $= \frac{1}{200} \times 1250$ मात्रक $= 6\frac{1}{4}$ मात्रक

प्रात: 10 से 11 बजे $= \frac{1}{200} \times 850$ मात्रक $= 4\frac{1}{4}$ मात्रक

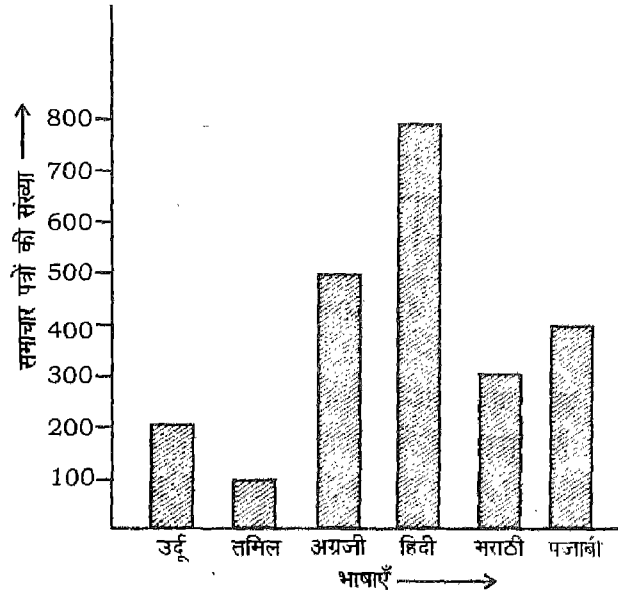
प्रात: 11 से मध्याह्न 12 बजे $= \frac{1}{200} \times 750$ मात्रक $= 3\frac{3}{4}$ मात्रक

मध्याह्न 12 से दोपहर 1 बजे $= \frac{1}{200} \times 550$ मात्रक $= 2\frac{3}{4}$ मात्रक

चरण 4: अब बराबर चौड़ाई और चरण 3 में निकाली गई ऊँचाइयों वाले दंड क्षैतिज अक्ष पर चिह्नित संगत समय-अंतरालों के ऊपर, बराबर दूरी छोड़ते हुए, बना लीजिए (आकृति 16.7)। आकृति 16.7 अभीष्ट दंड आलेख है।

मापदंड: ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश ग्राफ कागज का एक मात्रक = 200 वाहन

आकृति 16.7: विभिन्न समय अंतरालों में किसी चौराहे से होकर गुजरने वाले वाहनों की संख्या को दर्शाने वाला दंड आलेख

प्रश्नावली 16.1

1. आकृति 16.8 में दिया गया दंड आलेख एक छोटे शहर में छ: भाषाओं में छपे (दैनिक) समाचार पत्रों की बिक्री की संख्या को निरूपित करता है (आँकड़े निकटतम सैकड़ों में हैं)। दंड आलेख का अध्ययन कीजिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:
   (i) हिंदी, पंजाबी, उर्दू, मराठी और तमिल में पढ़े जाने वाले, प्रत्येक प्रकार के समाचार पत्रों की संख्या बताइए।
   (ii) अंग्रेजी की तुलना में हिंदी में कितने अधिक समाचार पत्र पढ़े जाते हैं?
   (iii) वह भाषा बताइए जिसमें पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्या न्यूनतम है।
   (iv) विभिन्न भाषाओं में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्याओं को बढ़ते क्रम में लिखिए।

आकृति 16.8: किसी शहर में छ: भाषाओं में छपे समाचार पत्रों की बिक्री

2. एक दुकानदार द्वारा छ: क्रमागत दिनों में बेचे गए बल्बों की संख्या इस प्रकार है:

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुद्धवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार
बेचे गए बल्बों की संख्या	55	32	30	25	10	20

इस सूचना को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

3. अपनी कक्षा के दस विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ मापकर लिख लीजिए। इस प्रकार आप जो सूचना एकत्र करते हैं, उसके निरूपण के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

4. किसी छोटे शहर में विभिन्न आयु-समूहों के व्यक्तियों की संख्या निम्नलिखित सारणी में दिखाई गई है:

आयु-समूह	1-14	15-29	30-44	45-59	60-74	75-89
व्यक्तियों की संख्या	1400	1200	1100	1000	950	300

ऊपर दी गई सूचना को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) सबसे छोटे आयु-समूह के व्यक्तियों का प्रतिशत सबसे अधिक आयु-समूह वाले व्यक्तियों के संदर्भ में कितना है?

(ii) इन सभी आयु-समूहों में नगर की कितनी जनसंख्या है?

5. 100 विद्यार्थियों द्वारा गणित के पेपर में 100 अंकों में से प्राप्त अंक नीचे की सारणी में दिए गए हैं:

अंक	9	19	58	61	75
विद्यार्थियों की संख्या	25	12	40	13	10

ऊपर दी गई सूचना को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) अधिकतम अंक प्राप्त करने वाला प्रत्येक विद्यार्थी दस रुपए के पुरस्कार पाने के लिए योग्य है। पुरस्कारों के लिए कितने धन की आवश्यकता है?

(ii) न्यूनतम अंक पाने वाले प्रत्येक विद्यार्थी को प्रति दिन पाँच प्रश्न हल करने हैं। इन विद्यार्थियों द्वारा प्रति दिन कितने प्रश्न हल किए जाएँगे?

6. एक स्कूल-विशेष की कक्षा XI के 50 विद्यार्थियों की लंबाइयाँ इस प्रकार हैं:

लंबाई (सेमी में)	144	150	155	157	164
विद्यार्थियों की संख्या	7	8	17	13	5

ऊपर दी गई सूचना को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए। आलेख को पढ़कर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) विद्यार्थियों की कुल संख्या के कितने प्रतिशत विद्यार्थियों की लंबाई 150 सेमी से अधिक है?

(ii) कितने विद्यार्थियों की लंबाई 150 सेमी से अधिक, किंतु 160 सेमी से कम है?

याद रखने योग्य बातें

1. चित्र-संकेतों द्‌वारा सांख्यिक आँकड़ों का चित्रमय निरूपण आँकड़ों का चित्रालेख कहलाता है।
2. दंड आलेख सांख्यिक आँकड़ों का, बराबर दूरी पर लिए गए एकसमान चौड़ाई वाले क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर खींचे गए दंडों द्‌वारा, एक चित्रमय निरूपण होता है।
3. दंडों की एकसमान चौड़ाई और इनके बीच की बराबर दूरी, दी हुई सूचना (आँकड़े) और आलेख के लिए उपलब्ध स्थान को ध्यान में रखते हुए, उपयुक्त रूप से निश्चित की जाती है।
4. दंड आलेख को ग्राफ कागज पर बनाना आवश्यक नहीं है। परंतु सुविधा और परिशुद्‌धता की दृष्टि से यही ठीक रहता है।
5. दंड आलेख को एक शीर्षक देना चाहिए। चुने गए मापदंड को भी आलेख के नीचे लिख देना चाहिए।

अतीत के झरोखे से

प्रारंभ में *सांख्यिकी* शब्द का प्रयोग केवल राजाओं या सरकारों द्वारा अपने राज्यों के विभिन्न पहलुओं, जैसे कि जनसंख्या, संपत्ति, धन आदि के बारे में सांख्यिक आँकड़ों के रूप में सूचनाएँ एकत्र करने के लिए किया जाता था। ये आँकड़े राजाओं के लिए अपने राज्यों की वास्तविक स्थिति का ज्ञान करने और परिणामस्वरूप कर और लगान लगाने, तथा जनता की भलाई के लिए जनशक्ति और प्राकृतिक संपदा के सही उपयोग के लिए संभव कदम उठाने में सहायक होते थे।

इस प्रकार के सांख्यिक आँकड़ों को एकत्रित करने की प्रथा प्राचीन भारत में भी थी। इसका प्रमाण यह है कि *चन्द्रगुप्त मौर्य* के राज्य (324-300 ईसा पूर्व) में, इस प्रकार के आँकड़े, विशेषतः जन्म और मृत्यु से संबंधित आँकड़े एकत्र करने का बहुत अच्छा प्रबंध था। *अकबर* के राज्य (1556-1605 ई.) में, उस समय के भू-तथा-राजस्व मंत्री *राजा टोडरमल* भी भूमि तथा कृषि से संबंधित आँकड़ों का अभिलेख भली-भाँति रखते थे। *अबुल फज़ल* द्वारा लिखित *आइन-ए-अकबरी* (1596-97 ई.) में, उस अवधि में किए गए प्रशासकीय तथा सांख्यिक सर्वेक्षणों का विस्तृत विवरण मिलता है।

इस प्रकार, प्रारंभ में सांख्यिकी केवल राज्यों के मामलों से ही संबंधित थी। परंतु समय बीतने के साथ-साथ इसका क्षेत्र विस्तृत होता गया और इसमें जीवन के लगभग प्रत्येक क्षेत्र (जैसे- आयात-निर्यात, शादी-तलाक, दैनिक अधिकतम-न्यूनतम तापमान, निर्वाह सूचकांक आदि) से सांख्यिक आँकड़ों का संग्रह तथा आँकड़ों को सारणी और चित्रों के रूप में प्रस्तुत करना भी सम्मिलित हो गया। उन्नीसवीं शताब्दी के अंत में, सांख्यिकी का क्षेत्र और विस्तृत हो गया था। अब इसका संबंध न केवल आँकड़ों के संग्रह और इन्हें प्रस्तुत करने से था, अब इसमें प्राप्त आँकड़ों के अर्थ समझाना और इनसे निष्कर्ष निकालना भी शमिल हो गया था।

आज कम्प्यूटरों के क्षेत्र में आँकड़ों का संसाधन एक महत्त्वपूर्ण क्रियाकलाप है। आज सशक्त कम्प्यूटर रात-दिन करोड़ों-अरबों आँकड़ों के संसाधन में लगे रहते हैं। मौसम की पूर्व सूचना जैसे अनुप्रयोग, आँकड़ों के ऐसे ही संसाधनों से संभव हो पाते हैं, और ऐसे सभी संसाधनों में *सांख्यिकी* के नाम से ज्ञात विषय के मूलभूत सिद्धांतों का बहुलता से प्रयोग होता है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) 12 (ii) −27 (iii) 99 (iv) 1 (v) −67

2. (i) 23 (ii) 53 (iii) −1000 (iv) 101 (v) −167

3. (i) $\frac{8}{9}$ (ii) $\frac{-44}{46}$ (iii) $\frac{107}{51}$ (iv) $\frac{15}{2}$

4. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{5}$ (iii) $\frac{-1}{4}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $\frac{3}{8}$ (vi) $\frac{11}{107}$

5. (i) $\frac{5}{20}$ (ii) $\frac{9}{36}$ (iii) $\frac{-20}{-80}$ (iv) $\frac{-25}{-100}$ (v) $\frac{10000}{40000}$

6. (i) $\frac{-56}{-140}$ (ii) $\frac{154}{385}$ (iii) $\frac{-750}{-1875}$ (iv) $\frac{500}{1250}$ (v) $\frac{-6250}{-15625}$

7. (i) 90 (ii) 3 (iii) 12 (iv) 160

8. (i) $\frac{15}{18}$ और $\frac{14}{18}$ (ii) $\frac{8}{12}, \frac{10}{12}$ और $\frac{7}{12}$ (iii) $\frac{64}{80}, \frac{68}{80}, \frac{46}{80}$ और $\frac{55}{80}$

   (iv) $\frac{120}{168}, \frac{63}{168}, \frac{108}{168}$ और $\frac{160}{168}$

9. (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{-2}{7}$

10. (i) F (ii) T (iii) F (iv) T (v) F
    (vi) T (vii) F (viii) T (ix) F (x) F

प्रश्नावली 1.2

2. Q निरूपित करता है $\frac{3}{4}$, R निरूपित करता है $\frac{3}{2}$ और S निरूपित करता है $\frac{9}{4}$; T निरूपित करता है $\frac{-5}{2}$ ।

3. (ii) **4.** (i) $\frac{3}{11}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{12}$ (iv) $\frac{-3}{-7}$

5. (i) $\frac{5}{-7}$ (ii) $\frac{6}{13}$ (iii) $\frac{16}{-5}$ (iv) $\frac{4}{-3}$

6. (i) $<$ (ii) $>$ (iii) $=$ (iv) $>$

7. (i) $\frac{4}{11}, \frac{3}{11}$ (ii) $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ (iii) $\frac{7}{12}, \frac{5}{8}$ (iv) $\frac{4}{9}, \frac{3}{7}$

8. (i) $\frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{6}{13}, \frac{7}{13}$ (iii) $\frac{16}{5}, 3$ (iv) $\frac{4}{3}, \frac{8}{7}$

9. (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$

10. (i) F (ii) F (iii) F (iv) T (v) F (vi) F (vii) T

प्रश्नावली 2.1

1. (i) $\frac{10}{7}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $-\frac{5}{17}$ (iv) -1

2. (i) $-\frac{1}{36}$ (ii) $\frac{82}{99}$ (iii) $-\frac{26}{57}$ (iv) $-\frac{43}{78}$

5. (i) $\frac{37}{15}$ (ii) $-\frac{86}{63}$

प्रश्नावली 2.2

1. (i) $\frac{29}{75}$ (ii) $-\frac{17}{72}$ (iii) $\frac{29}{63}$ (iv) $\frac{1}{195}$

2. (i) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$, नहीं (ii) $\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}$, नहीं (iii) $\frac{1}{66}, -\frac{1}{66}$, नहीं

3. $-\frac{41}{7}$ **4.** $\frac{35}{38}$ **5.** $\frac{103}{72}$ **6.** $\frac{41}{33}$

7. (i) $-\frac{119}{36}, -\frac{143}{36}$, नहीं (ii) $\frac{67}{63}, \frac{76}{63}$, नहीं

8. (i) $\frac{19}{18}$ (ii) $\frac{41}{72}$ (iii) $-\frac{1}{10}$ (iv) $-\frac{35}{72}$

9. (i) $-\frac{5}{26}$ (ii) $-\frac{9}{14}$ (iii) $\frac{34}{9}$ (iv) $\frac{77}{23}$

10. (i) F (ii) T (iii) T (iv) T

प्रश्नावली 2.3

1. (i) $\frac{6}{55}$ (ii) $-\frac{6}{35}$ (iii) $-\frac{11}{81}$ (iv) $-\frac{3}{5}$ (v) $-\frac{3}{34}$

(vi) $-\frac{17}{21}$ (vii) $\frac{2}{3}$ (viii) $-\frac{24}{13}$ (ix) $\frac{2}{3}$ (x) $\frac{1}{10}$

2. (i) $-\frac{16}{5}$ (ii) $-\frac{1}{12}$ (iii) $\frac{42}{1}$ (iv) $-\frac{3}{7}$

4. (ii) $\frac{5}{9}\times(-4)$ (iii) $\frac{-5}{8}\times\frac{3}{11}$ (iv) $\frac{-3}{-7}\times(-6)$

6. (ii) $\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{-5}{13}$ (iii) $(-4\times(-6))\times\left(-\frac{7}{11}\right)$ (iv) $\left(-\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{7}$

9. (ii) $\frac{-3}{8}\times\frac{-6}{11}+\frac{-3}{8}\times\frac{4}{9}$ (iii) $6\times\frac{5}{13}+6\times\frac{-3}{4}$

(iv) $\frac{2}{3}\times\frac{-5}{7}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ (v) $\frac{-4}{7}\times\frac{3}{4}-\frac{-4}{7}\times\frac{-2}{3}$

10. (i) T (ii) F (iii) F (iv) F (v) F (vi) F (vii) T (viii) F

प्रश्नावली 2.4

1. (i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{-1}{19}$ (iii) $\frac{13}{8}$ (iv) $\frac{-29}{13}$

6. (i) $\frac{20}{3}$ (ii) $-\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{7}{8}$ (iv) $-\frac{15}{4}$

7. $\frac{10}{3}$ **8.** $\frac{4}{3}$

10. (i) F (ii) F (iii) F (iv) T (v) T

प्रश्नावली 2.5

1. (i) $-\frac{13}{2}$ (ii) $-\frac{85}{84}$ (iii) 0 (iv) 0

2. (i) $\frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1$ (ii) $-\frac{100}{77}, \frac{-90}{77}, \frac{-80}{77}$ (iii) $\frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}$ (iv) $-\frac{577}{546}, \frac{-136}{273}, \frac{11}{182}$

3. नहीं। $\frac{3}{5}, \frac{27}{70}$ या $\frac{3}{5}, \frac{57}{70}$ **4.** नहीं। $\frac{4}{9}, \frac{133}{198}$ या $\frac{4}{9}, \frac{43}{198}$

5. (i) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{5}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

6. (i) $\frac{4789}{2604}$ (ii) $\frac{-23389}{12056}$

7. (i) $-\frac{71}{12}$ (ii) $\frac{71}{12}$

8. $(x \times y)^{-1} = x^{-1} \times y^{-1}$ **9.** $(x \div y)^{-1} = x^{-1} \div y^{-1}$

10. (i) F (ii) F (iii) T (iv) T (v) F
(vi) T (vii) T (viii) F (ix) F (x) F

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 3.75 (ii) 2.04 (iii) 2.405 (iv) 8.025 (v) −0.5 (vi) −0.65 (vii) 0.085 (viii) −1.3125
2. (ii) (v) और (viii) । हर केवल 2 और / या 5 का ही गुणज है।
3. (i) $\overline{.90}$ (ii) $.\overline{153846}$ (iii) $.1\overline{8}$ (iv) $.\overline{1}$ (v) $.\overline{027}$ (vi) $-6.\overline{6}$ (vii) $3.\overline{142857}$ (viii) $-1.\overline{3}$
4. (i) F (ii) T (iii) F (iv) T (v) F

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $\frac{14}{5}$ (ii) $\frac{37}{1000}$ (iii) $\frac{-3}{4}$ (iv) $\frac{-69}{8}$ (v) $\frac{-79}{100}$ (vi) $\frac{7543}{1000}$ (vii) $\frac{48}{5}$ (viii) $\frac{-47}{8}$
2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) $\frac{22}{5}$ (iii) $\frac{389}{50}$ (iv) $\frac{1147}{50}$ (v) $\frac{4387}{200}$ (vi) $\frac{184071}{10000}$
3. (i) $\frac{12821}{1000}$ (ii) $\frac{1421}{100}$ (iii) $\frac{1574}{125}$ (iv) $\frac{-81}{50}$ (v) $\frac{400127}{500}$
4. (i) $\frac{11424}{25}$ (ii) $\frac{924}{125}$ (iii) $\frac{3969}{400}$ (iv) $\frac{1008}{25}$ (v) $\frac{27}{1000000}$
5. (i) $\frac{18}{5}$ (ii) $\frac{3027}{50}$ (iii) $\frac{729}{625000}$ (iv) 70 (v) 1526

प्रश्नावली 4.1

1. (i) $\frac{9}{49}$ (ii) $\frac{243}{1024}$ (iii) $\frac{16}{81}$ (iv) $\frac{-125}{729}$
2. (i) $\frac{3}{625}$ (ii) $\frac{-1}{12}$ (iii) 6561 (iv) 864

3. (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $-\left(\frac{4}{27}\right)^2$ (iii) $-\left(\frac{5}{11}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{7}{4}\right)^4$

4. (i) $\frac{3}{16}$ (ii) $\frac{-9}{16}$ (iii) $\frac{15}{8}$ (iv) 125

5. (i) $-\frac{1}{243}$ (ii) $\frac{256}{81}$ (iii) 15625 (iv) $\frac{9}{49}$

6. (i) $\frac{1}{27}$ (ii) $\frac{32}{16807}$ (iii) $\frac{625}{81}$ (iv) $\frac{121}{169}$

7. (i) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; $\frac{10}{16}, \frac{11}{16}, \frac{12}{16}, \ldots, \frac{35}{16}$; और भी अनेक हो सकती हैं।

प्रश्नावली 4.2

1. (i) 7 (ii) 11 (iii) 11 (iv) 3
   (v) 6 (vi) 4 (vii) 6 (viii) 4

2. (i) $\frac{32}{243}$ (ii) $\frac{9}{16}$ (iii) $\frac{1}{16}$ (iv) $\frac{1}{64}$

3. (i) $\left(\frac{5}{2}\right)^8$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{24}$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$
   (iv) $\left(\frac{5}{4}\right)^5$ (v) $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ (vi) $\left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

4. (i) F (ii) T (iii) T (iv) F (v) T (vi) F

प्रश्नावली 4.3

1. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{81}$ (iii) 256 (iv) $\frac{243}{32}$ (v) $\frac{25}{9}$ (vi) $\frac{-343}{64}$ (vii) $\frac{256}{81}$

2. (i) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ (iii) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ (v) $\left(-\frac{1}{14}\right)^3$ (vi) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

3. (i) 2^{-3} (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-12}$ (iii) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$ (iv) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{-6}$ (v) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$ (vi) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$

4. (i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 1
(v) 3 (vi) 1 (vii) 0 (viii) 0

5. 3^8 **6.** $(-4)^7$ **7.** -2 **8.** -1 **9.** $\frac{27}{32}$ **10.** $\frac{729}{64}$

11. $\frac{32}{729}$ **13.** (i) T (ii) T (iii) T (iv) T (v) T

प्रश्नावली 4.4

1. (i) 9.8×10^8 (ii) 9.7×10^{-11} (iii) 55×10^{-14}
(iv) 10.7×10^9 (v) $60.2 \times 10^{22}, 6.02 \times 10^{23}$

2. (i) 0.0000065 (ii) 0.0000000089 (iii) 56146929
(iv) 5800000000000 (v) 1001000000

3. (i) 1.05×10^6 (ii) $1.353 \times 10^9, 1.361 \times 10^9$
(iii) $1.027 \times 10^9, 5.312 \times 10^8, 4.958 \times 10^8$ (iv) 1×10^{-6}

प्रश्नावली 5.1

1. (i)

x	–	–	–	21	–
y	–	27	39	–	75

(ii)

x	–	–	–	–	11	–
y	2.5	–	7.5	10	–	12

(iii)

x	–	–	–	8	–
y	0.4	2	–	–	128

2.

समय	–	–	7	–	155
गुब्बारे की ऊँचाई (मीटर में)	36	–	–	300	–

3. 30 टिकट   4. 480 यंत्र   5. 7.30 रु   6. 64 बोतल

7. 1.925 सेमी   8. 157500 रु   9. 108 शब्द

प्रश्नावली 5.2

1. (i) व्युत्क्रमानुपात   (ii) व्युत्क्रमानुपात   (iii) अनुक्रमानुपात

2. (i) संभव   (ii) संभव   (iii) संभव नहीं   (iv) संभव

3. (i), (ii),   (iii) संभव हैं;   (iv) संभव नहीं

4. 10 किमी   5. $3\frac{1}{4}$ घंटे   6. 16 लीटर   7. 4 किमी / घंटा   8. $5\frac{1}{3}$ घंटे

9. 3000 व्यक्ति   10. 10 सप्ताह   11. 16 किमी / घंटा   12. 50 साइकिल

13. 160 व्यक्ति

14.

दबाव (सेमी में)	–	–	90.00	–	60.00
आयतन (मिली में)	–	11.25	–	8	–

15.

आयतन (V)	–	–	–	25	12.5
निरपेक्ष तापमान (T)	–	360	450	–	–

16. 12 दिन **17.** 2 दिन **18.** 12 घंटे **19.** 24 सेकंड

20. 250 मी **21.** 72 किमी / घंटा **22.** 50.4 सेकंड **23.** 120 किमी / घंटा

प्रश्नावली 6.1

1. (i) 300 रु (ii) 10000 रु (iii) 2000 रु

2. 4000 रु **3.** 240 दिन **4.** 176400 **5.** 800

6. 7000 रु **7.** 2000, 2160 **8.** 1150, 460 **9.** 20 **10.** 1200

प्रश्नावली 6.2

1. (i) क्र.मू. = 450 रु , वि.मू. = 540 रु , लाभ % = 20

(ii) वि.मू. = 3038 रु. हानि % = 2, उपरिव्यय = 100 रु

(iii) क्र.मू. = 30000 रु, लाभ = 6000 रु, लाभ % = 20

(iv) लाभ = 72 रु, वि.मू. = 972 रु, खरीद मूल्य = 400 रु

(v) क्र.मू. = 250 रु, हानि = 15 रु, वि.मू. = 235 रु

2. 20 **3.** हानि = 10% **4.** लाभ = 25% **5.** 25% **6.** लाभ = 35%

7. क्र.मू. = 900 रु **8.** क्र.मू. = 12800 रु **9.** लाभ = 20%

10. 1108.80 रु **11.** 187.50 रु **12.** लाभ = 10%

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 180 रु (ii) 700 रु (iii) 60 रु, 260 रु

(iv) 210 रु, 810 रु (v) 28 रु (vi) 66.50 रु

(vii) 6.75 रु, 186.75 रु (viii) 12.5% (ix) 8.00 रु, 488.00 रु

(x) समय = $2\frac{1}{2}$ वर्ष, मिश्रधन = 792 रु (xi) दर = 10%, ब्याज = 150 रु

2. (i) ब्याज = 192 रु, मिश्रधन = 992 रु (ii) ब्याज = 162 रु, मिश्रधन = 612 रु
(iii) ब्याज = 20 रु, मिश्रधन = 620 रु

3. (i) 400 रु (ii) 350 रु (iii) 9600 रु

4. (i) $2\frac{1}{2}$ वर्ष (ii) $\frac{1}{2}$ वर्ष (iii) 7 वर्ष

5. (i) 7.5% (ii) 13% (iii) 18%

6. 1050 रु 7. 12060 रु 8. मिश्रधन = 603.20 रु, ब्याज = 83.20 रु

9. मूलधन = 2200 रु 10. मूलधन = 7100 रु 11. मूलधन = 1800 रु

12. 1600 रु 13. दर = $12\frac{1}{2}$% 14. दर = 22% 15. समय = 8 वर्ष

प्रश्नावली 7.1

1. (i) $6a^2$ (ii) $8a^5$ (iii) $-42\,ab^2c$
(iv) $-49\,x^3yz$ (v) $\frac{4}{17}x^3y^5$ (vi) $\frac{2}{3}\,a^3b^4c^5$
(vii) $0.72\,p^3q^4$ (viii) $9.9\,pqr$

2. (i) $60\,a^3b^3c^3$ (ii) $300\,p^3q^3$ (iii) $105\,b^3c^3d^2$
(iv) $\frac{2}{5}x^6y^6z^6$ (v) $7.986\,p^2q^2r^2$ (vi) $0.54\,a^4b^3c^6$

3. (i) a^{100} (ii) $a^{150}b^{100}c^{100}d^{101}$ (iii) $-\frac{1}{9}a^3b^3c^3$ (iv) 0

4. $-50a^6$ 5. $-30\,x^3y^4$ 6. $-1600\,a^{10}b^5$; -50

7. $-81.92\,x^5y^5$; -2.56

9. (i) $66\,a^3x^5$ (ii) $-\frac{1}{5}p^3q^3r^3$

10. (i) x और yz ; y और xz ; z और xy ; 1 और xyz

(ii) a और ab ; b और a^2 ; 1 और a^2b

(iii) 7 और pq ; p और $7q$; q और $7p$; 1 और $7pq$

11. (i) यह भुजाओं $3x$ और $4x$ वाले आयत का क्षेत्रफल निरूपित करता है।

(ii) यह भुजाओं 7 और $5p$ वाले आयत का क्षेत्रफल निरूपित करता है।

12. (i) 280 (ii) 60 **13.** (i) $a^2b^2c^2d^2$ (ii) $x^4y^3z^6$

14. (i) $15a^2+18a$ (ii) $-6a^3-26a^2$

(iii) $8x^3-12x^2y^2$ (iv) $-15\,p^3q\,r^2-35\,p^2q^2r^2$

15. (i) $\frac{3}{8}x^2y^2+\frac{1}{2}x^3y$ (ii) $\frac{7}{3}a^3b^5-2a^4b^4$

16. (i) $3.3\,a^3b-1.65\,a^2b^2$; 19.8

(ii) $-0.81\,a^2b^2+1.08\,a^4$; 14.04

17. (i) $-3x^3y+3xy^3$ (ii) $\frac{1}{2}x^5y^3z^3+\frac{1}{2}x^3y^5z^3$

18. (i) a^2-b^2 (ii) $2a^2+ab-b^2$

(iii) a^3+b^3 (iv) $-3p^2-51p$

प्रश्नावली 7.2

1. (i) $12x^2+64x+45$ (ii) $3x^2-17x-56$

(iii) $\frac{3}{4}a^5+7a^3b+\frac{1}{6}a^2b^2+\frac{14b^3}{9}$ (iv) $6.25a^2-5.29b^2$

(v) $6p^2q^2+13pq^3+6q^4$

2. (i) $8x^2 - 6x - 35$ (ii) $7x^2 + 6xy - y^2$
(iii) $a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab$ (iv) $p^3 - p^2q - pq^2 + q^3$

3. (i) $8x^3y + 22x^2y^2 + 15xy^3$ (ii) $a^5b^3 + 3a^5 + 5b^3 + 19$
(iii) $a^4 + ab^3c^3d^3 + a^3bcd + b^4c^4d^4$ (iv) $-4m^2n^2 + 6mn + 8n^3$
(v) $t^4 - s^6$ (vi) $4ac$

4. (i) $x^4 - 25y^4$ (ii) $-2x^4 - 4x^2y^2 - 2y^4$
(iii) $x^3 + 5x^2 - 5x - 20$ (iv) $5x^2 + 3x - 2xy + 21y - 14y^2$
(v) $3x^2 + 4xy - y^2$

5. (i) $2x^2 - 5xy + 7x + 14y - 18y^2$ (ii) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{163}{8}xy + 16x - 4y + 5y^2$
(iii) $x^3 + x^3y + x^2y + xy^2 + xy^3 + y^3$ (iv) $a^4 + a^3b + a^3c - ab^3 - b^3c - b^4$

6. (i) $2.25x^2 + 4.5x - 16y^2 - 12y$ (ii) $m^2p^2 - m^2n^2 - n^4 + p^4$

7. (i) $x^3 + y^3$ (ii) $10x^2 + 3xy^2 - y^2 - y^3$ (iii) $x^2 + 2xy^2 + y^3$

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $4y^2 + 20y + 25$
(iii) $\frac{4}{25}p^2 + \frac{12}{5}p + 9$ (iv) $1.21m^2 + 4.62m + 4.41$
(v) $9a^2 + 24ab + 16b^2$ (vi) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}xy + \frac{9}{16}y^2$

2. (i) $a^2 - 10a + 25$ (ii) $4a^2 - 2a + \frac{1}{4}$ (iii) $\frac{25}{4}x^2 - 35x + 49$
(iv) $49a^2 - 126ab + 81b^2$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2$

3. (i) $36x^2 - 49$ (ii) $\frac{1}{4}x^2 - 1$ (iii) $9a^2 - 49b^2$
(iv) $144y^2 - 121x^2$ (v) $b^4 - a^4$ (vi) $4x^6 - 81y^6$

4. (i) $a^2 - 10a + 25$ (ii) $4a^2 + 28a + 49$ (iii) $9a^4 + 24a^2b + 16b^2$
(iv) $36x^4 - 60x^2y + 25y^2$ (v) $49y^4 - 112x^3y^2 + 64x^6$
(vi) $16m^6 + 88m^3n^3 + 121n^6$

5. (i) $36x^2 - 64y^2$ (ii) $b^6 - 9a^4$ (iii) $\frac{4}{9}m^4 - \frac{9}{64}n^4$ (iv) $2.89p^6 - 1.44a^6$

6. (i) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (ii) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$
(iii) $4x^2 + 12xy^3 + 9y^6$ (iv) $49p^6 - 70p^3a^2 + 25a^4$

7. (i) $8x^2 + 50$ (ii) $18p^2 + 128q^2$
(iii) $6600\,mn$ (iv) $-\frac{1}{50}r^2t^2$

8. (i) $a^2b^2 + b^2c^2$ (ii) $m^4 + m^2n^4$

9. (i) $(3x - 7)^2$ (ii) $(89p + 5q)^2$

10. (i) 5041 (ii) 8464 (iii) 10609
(iv) 3481 (v) 9801 (vi) 982081

11. (i) 9975 (ii) 6396 (iii) 89991

12. (i) 200 (ii) 2540 (iii) 2760

13. (i) 62 (ii) 143 (iii) 12

प्रश्नावली 8.1

1. (i) $2x$ (ii) $7pq$ (iii) $3abc$ (iv) b^2
(v) $5a$ (vi) abc (vii) 2

2. (i) $2a^2$ (ii) $3x^2y^2$ (iii) $-4a^2$ (iv) 4

3. (i) $7(x+3)$ (ii) $6(p-2)$ (iii) $a(a+2)$ (iv) $5x(2+x)$
(v) $a(7a+2)$ (vi) $3xy(x+2y)$
(vii) $4m(5m^2-4)$ (viii) $10pq\,(2p+a)$

4. (i) $2x^2(-3x^2 + x - 5)$ (ii) $10ab\,(4a^2b - a^2 + 2b^2)$
(iii) $5(2a^3 - 3b^3 + 4c^3)$ (iv) $a(a^2bc + 4b^3 + 41a^2)$

5. (i) $(5a + b)(5a - b)$ (ii) $(7p + 6)(7p - 6)$

(iii) $(2a^2b^2 + 3pq)(2a^2b^2 - 3pq)$ (iv) $(ab + 3)(ab - 3)$

(v) $(2n + 5m)(2n - 3m)$

6. (i) $(a + 4)(a + 4)$ (ii) $(b - 5)(b - 5)$

(iii) $4(a - 1)(a - 1)$ (iv) $(5x + 3)(5x + 3)$

(v) $(7a + 6b)(7a + 6b)$ (vi) $(11m - 4n)(11m - 4n)$

7. (i) $(x + y)(x + 9)$ (ii) $(2x + 1)(5y + 2)$

(iii) $(x - 4)(5x + 2y)$ (iv) $(2y - 3)(3x - 2)$

8. (i) $x(px + q)$ (ii) $16x^5(x^2 - 3)$

(iii) $7(x^2 + 3y^2)$ (iv) $2(5x + 6y)(5x - 6y)$

(v) $7(3x + 4y)(3x - 4y)$ (vi) $-4pq$

(vii) $2x(x^2 + y^2 + z^2)$ (viii) $3a^2(1 - 3b - 9ac)$

9. (i) $(x - z + y)(x - z - y)$ (ii) $(5a + c + 7b)(5a + c - 7b)$

(iii) $(p^2 + q^2)(a + b)$ (iv) $(a + 1)(b + 1)$

10. (i) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ (ii) $(m^2 + 16)(m + 4)(m - 4)$

(iii) $(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz)(x + y + z)(x - y - z)$

(iv) $z(2x - z)(2x^2 + z^2 - 2xz)$

प्रश्नावली 9.1

1. $x = \frac{-14}{3}$ **2.** $x = -1$ **3.** $x = \frac{4}{5}$

4. $x = \frac{31}{2}$ **5.** $x = -6$ **6.** $m = \frac{7}{5}$

7. $p = \frac{17}{9}$ **8.** $t = \frac{5}{4}$ **9.** $x = -2$

10. $y = \frac{2}{3}$ **11.** $x = -96$ **12.** $w = \frac{-5}{18}$

13. $x = \frac{183}{10}$ या 18.3 **14.** $y = \frac{-33}{2}$ या –16.5 **15.** $z = 42$

16. $x = 18$ **17.** $x = \frac{9}{2}$ **18.** $x = \frac{2}{3}$

19. $y = \frac{6}{5}$ **20.** $p = \frac{1}{8}$

प्रश्नावली 9.2

1. 21 **2.** 30 **3.** 8

4. 46, 49 **5.** 7, 8 और 9 **6.** 4 वर्ष और 24 वर्ष

7. लंबाई = 23 मी, चौड़ाई = 19 मी **8.** 5 वर्ष

9. 100 रु वाले पुरस्कारों की संख्या = 19; 25 रु वाले पुरस्कारों की संख्या = 44

10. 10 रु के नोटों की संख्या = 5; 50 रु के नोटों की संख्या = 4

11. लंबाई = 10 सेमी, चौड़ाई = 4 सेमी **12.** 40, 15 और 25

13. 25 लड़के **14.** 500 रु वाले पुरस्कारों की संख्या = 75; 100 रु वाले पुरस्कारों की संख्या = 125

15. 480000 रु **16.** $\frac{7}{4}$ **17.** लंबाई = 100 मी, चौड़ाई = 50 मी

18. $14\frac{1}{2}$ किग्रा **19.** 4 घंटे **20.** 36

प्रश्नावली 10.1

13. (i) रचना नहीं की जा सकती (iv) रचना नहीं की जा सकती

(v) रचना नहीं की जा सकती

प्रश्नावली 10.2

1. $\angle A = \angle B$ 2. $EF = DE$ 3. $\angle Q = 45°, \angle P = 90°$

4. $\angle C = 50°$ 5. $\angle Q = 108°$ 6. $XY = YZ$

7. $BC = 4$ सेमी

8. (i) $x = 30°$ (ii) $y = 60°$ (iii) $z = 60°$

9. (i) $\angle PRQ = 80°$ (ii) $\angle PQR = 50°$

10. (i) $\angle ABC = 70°, \angle ACB = 40°$ (ii) $x = 110°, y = 140°$

12. (i) $\angle ABC = 60° = \angle ACB$
    (ii) $\angle DBC = 70° = \angle DCB$
    (iii) $\angle ABD = 130°, \angle ACD = 130°$; हाँ

13. $\angle P = 90°, \angle Q = 45° = \angle R$

14. (i) नहीं (ii) $\angle R > \angle Q$
    (iii) बड़ा कोण बड़ी भुजा के सम्मुख है।

15. (i) नहीं (ii) $AC > AB$
    (iii) बड़ी भुजा बड़े कोण के सम्मुख है।

प्रश्नावली 10.3

1. $AB = 15$ सेमी

2. (i) $c^2 = 6.25$ सेमी^{2} (ii) $c^2 = 42.25$ सेमी^{2} (iii) $c^2 = 380.25$ सेमी^{2}
   (iv) $c^2 = 2500$ सेमी^{2} (v) $c^2 = 676$ सेमी^{2}

3. 7 सेमी 4. 8 मी 5. 10 सेमी

6. (ii), (iii), (iv), (vi) 7. ΔABC का $\angle B$ समकोण है।

8. नहीं, $AB^2 > AC^2 + BC^2$ सत्य है।

[illegible]

1. (i) रेखाखंड, लंब (ii) लंबकेंद्र
   (iii) बाहर (iv) AC और BC
   (v) AC (vi) संगामी
   (vii) केंद्रक (viii) AB
   (ix) अभ्यंतर

2. (ii) हाँ 3. बिंदु C 4. (i) हाँ (ii) बाहर

5. हाँ, DR = RE; FR, ΔDEF की एक माध्यिका है।

प्रश्नावली 10.5

1. (i) संगामी (ii) लंब समद्विभाजक
   (iii) संगामी (iv) कोण समद्विभाजक (v) $\angle A$

3. नहीं 4. हाँ 5. हाँ

प्रश्नावली 11.1

1. $\angle D = \angle Y$
2. (i), (iii), (vi), (vii), (viii)
3. (i) $\angle R = \angle X$ (ii) QR = ZX (iii) $\angle P = \angle Y$
   (iv) QP = ZY (v) $\angle Q = \angle Z$ (vi) RP = XY
4. (i) $\Delta PQR \cong \Delta XZY$ (iii) $\Delta ABC \cong \Delta RQP$ (v) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$
   (vi) $\Delta PQR \cong \Delta RSP$ (vii) $\Delta BAD \cong \Delta CAD$
5. AD = AD; हाँ
6. (i) हाँ, अंत: एकांतर कोण (ii) हाँ
   (iii) AB = DC, $\angle BAC = \angle DCA$ और AC = AC
7. (iii)

प्रश्नावली 11.2

1. $AB = EF$

2. (i) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ANM$

(iv) $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ (vi) $\Delta XYZ \cong \Delta QPZ$

3. $AD = AD$

4. (i) हाँ, शीर्षाभिमुख कोण

(ii) हाँ

(iii) $AO = BO$, $\angle A = \angle B$ और $\angle AOC = \angle BOD$

(iv) हाँ, क्योंकि $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

5. (i) हाँ

(ii) $\angle BAD = \angle CAD$, $AD = AD$ और $\angle ADB = \angle ADC$

(iii) हाँ, क्योंकि $\Delta ADB \cong \Delta ADC$

प्रश्नावली 11.3

1. $AC = DE$

2. (i) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (ii) $\Delta PQR \cong \Delta XZY$ (iii) $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

(iv) $\Delta ABO \cong \Delta QPO$ (v) $\Delta DEF \cong \Delta NML$ (vi) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

3. $AC = AC$ **4.** $AD = AD$ **5.** $\Delta PQR \cong \Delta TRQ$

प्रश्नावली 11.4

1. $AC = YZ$

2. (i) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (iii) $\Delta RPQ \cong \Delta YXZ$

(v) $\Delta RPQ \cong \Delta QDR$ (vi) $\Delta CAO \cong \Delta DBO$

3. (i) $AC = AC$ (ii) हाँ, क्योंकि $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

4. (i) हाँ

(ii) $AB = AC$, $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ और $AD = AD$

(iii) हाँ, क्योंकि $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

5. $BD = CE$, $\angle BDC = \angle CEB = 90^\circ$ और $BC = CB$

विविध प्रश्नावली

1. (a) (i) FD (ii) DE (iii) FE

(iv) $\angle F$ (v) $\angle D$ (vi) $\angle E$

(b) $\angle R$ (c) EF (d) SAS

(e) ASA

2. (i) SSS, $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

(ii) RHS, $\Delta XYZ \cong \Delta DFE$

(iii) ASA, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

(iv) SAS, $\Delta PTQ \cong \Delta STR$

3. (i) ASA (ii) SSS (iii) RHS

(iv) ASA (v) SAS (vi) ASA

(vii) SSS (viii) ASA (ix) SAS

4. SAS ; 40°

प्रश्नावली 12.1

1. (i) 4 (ii) 4 (iii) 4 (iv) 2

2. $\Delta ACD, \Delta ACB$; दो त्रिभुज **3.** चार त्रिभुज; $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOA$

4. (i) चार — PQ और QR ; QR और RS ; RS और SP ; SP और PQ ।

(ii) दो — PQ और RS ; PS और QR ।

(iii) चार — $\angle P$ और $\angle Q$; $\angle Q$ और $\angle R$; $\angle R$ और $\angle S$; $\angle S$ और $\angle P$ ।

(iv) दो — $\angle P$ और $\angle R$; $\angle Q$ और $\angle S$ ।

5. (i) शीर्ष — A, B, C, D।

(ii) कोण — $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$।

(iii) विकर्ण — AC और BD।

(iv) आसन्न भुजाएँ — AB और BC ; BC और CD ; CD और DA ; DA और AB।

(v) आसन्न कोण — $\angle A$ और $\angle B$; $\angle B$ और $\angle C$; $\angle C$ और $\angle D$; $\angle D$ और $\angle A$।

(vi) सम्मुख भुजाएँ — AB और CD ; BC और DA।

(vii) सम्मुख कोण — $\angle A$ और $\angle C$; $\angle B$ और $\angle D$।

6. हाँ, एक बिंदु

प्रश्नावली 12.2

1. 115°   2. 70°   3. 95°

4. 90°   5. नहीं, चारों कोणों का योग 360° से अधिक है।

6. 45°, 75°, 105°, 135°

7. 36°, 72°, 108°, 144°

प्रश्नावली 13.1

4. 60° ; एक ही वृत्तखंड में कोण

5. सभी कोण बराबर हैं (90°)।

6. $\angle ACD = \angle APD = 75°$

7. $\angle ACB = 90°$; $\angle ABC = 30°$

8. $\angle RQS = 50°$; $\angle RPS = 50°$

9. $\angle DFE = 45°$; $\angle FED = 85°$

10. 70°

प्रश्नावली 14.1

1. 1750 मी^{2} 2. 1900 मी^{2}

3. 1176 मी^{2} 4. 30 सेमी^{2}

5. (i) 4.84 मी^{2} (ii) 1.60 मी^{2} 6. (i) 30 मी^{2} (ii) 750 रु

7. (i) 116 मी^{2} (ii) 278.40 रु   8. (i) 301 सेमी^{2} (ii) 745.20 रु

9. 4975 मी^{2}, 522375 रु   10. 15594 रु

11. (i) 71.9 मी^{2} (ii) 338.1 मी^{2} 12. (i) 441 मी^{2} (ii) 48510 रु

13. (i) 308 मी^{2} (ii) 2700 मी^{2} 14. (i) 588 मी^{2} (ii) 6612 मी^{2}

प्रश्नावली 15.1

1. (i) घनाभ: मक्खन का डिब्बा, लंच बॉक्स, चॉक का डिब्बा, एयर कंडिशनर
   (ii) घन: बर्फ के घन, चीनी के घन, पासा, घनाकार ब्लाक

2. फलक : PQRS ; TUVW ;
   PQUT ; SRVW ;
   PSWT ; QRVU ।

   कोर : PS ; PQ ; QR ; RS ;
   TU ; UV ; VW ; WT ;
   PT ; SW ; UQ ; RV ।

3. AB = CD = GH = x ; AD = BC = EH = y ; AE = BF = DH = z ।

4. ABFE ; BCGF ; CDHG ; DAEH   5. AE या BF या CG या DH

6. (i) BFGC (ii) ABCD ; EFGH ; ABFE ; CDHG
   (iii) ABFE ; ABCD (iv) HG ; HE ; HD

7. ABCD ; ABFE ; AEHD । शीर्ष G ; हाँ ; चार विकर्ण AG, BH, CE, DF हैं।

8. घनाभ   9. घन

10. (i) 6 (ii) 12 (iii) कोर
    (iv) विमाएँ (v) 4 (vi) घन
    (vii) 8 (viii) शीर्ष (ix) सर्वांगसम वर्ग
    (x) 3 (xi) 90° (xii) 4

प्रश्नावली 15.2

1. (i) किसी कमरे में पेंट या सफेदी कराने के लिए।

   (ii) एक बक्स या संदूक बनाने के लिए।

   (iii) किसी अलमारी को पेंट कराने के लिए।

2. 654 सेमी^{2}
3. 544 सेमी^{2}
4. 4750 सेमी^{2}
5. (i) 726 सेमी^{2} (ii) 8.64 मी^{2} (iii) 4374 सेमी^{2}
6. 1350 सेमी^{2}
7. (i) 120640 सेमी^{2} (ii) 241.28 रु
8. 110800 रु
9. (i) 9.16 मी^{2} (ii) 458 रु
10. 400 मी^{2}
11. 66 मी^{2}
12. 278 मी^{2}
13. 20880 रु
14. 30000 रु
15. 100 ईंट

प्रश्नावली 15.3

1. (i) 960 सेमी^{3} (ii) 1760.22 सेमी^{3} (iii) 1672704 मिमी^{3}

   (iv) 445.295 मी^{3} (v) 5.04 मी^{3} (vi) 56250 सेमी^{3}

2. (i) 3375 मिमी^{3} (ii) 1953.125 सेमी^{3} (iii) 17.576 मी^{3}

   (iv) 5.088448 मी^{3}

3. 3 सेमी
4. 180 सेमी^{3}
5. 135000 l
6. 6 मी
7. 4 मी
8. 4320 रु
9. 2 मी
10. 3 दिन
11. 432 सेमी^{3}

12. 16000 पेटियाँ **13.** 4000 टुकड़े **14.** 27000 टुकड़े

15. (i) 8 गुना (ii) $\left(\frac{1}{8}\right)$ गुना (iii) 27 गुना

प्रश्नावली 16.1

1. (i) हिंदी = 800 ; पंजाबी = 400 ; उर्दू = 200 ; मराठी = 300 ; तमिल = 100 ।

(ii) 300 (iii) तमिल

(iv) तमिल = 100, उर्दू = 200, मराठी = 300 ; पंजाबी = 400, अंग्रेजी = 500, हिंदी = 800

4. (i) $466\frac{2}{3}\%$ (ii) 5950

5. (i) 100 रु (ii) 125

6. (i) 70% (ii) 30

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।